7. Testes de Hipótese

Muitas vezes, em problemas práticos, o objetivo principal do pesquisador não é a estimação em si, mas sim, fazer afirmações a respeito do(s) parâmetro(s).

Exemplos:

a) Pesquisadores afirmam que a temperatura média do corpo é $98.6F$ ($37°C$). Uma amostra de $n = 106$ indivíduos foi escolhida aleatoriamente e foram observadas $\bar{x} = 98.20F$ e $s = 0.62F$.

Pergunta: *A amostra constitui evidência suficiente para rejeitar a crença de que* $\mu = 98.6F$?

b) Um operador de uma máquina de empacotar cereais, monitora o peso das caixas pesando um determinado número de caixas periodicamente. A norma diz que a máquina deve continuar operando a menos que a amostra indique que a máquina não esteja funcionando normalmente. Neste caso, a máquina deve ser desligada e ajustada. A condição requerida para a máquina continuar funcionando é que $\mu = 453$ g.

Nota: *O operador, neste caso, não está interessado em estimar* μ*, mas sim determinar se há evidência suficiente na amostra para concluir que* $\mu \neq 453$ g.

c) Um grande pomar de maçãs deve ser pulverizado toda primavera contra certa doença que ataca as folhas. No ano anterior, o administrador do pomar pulverizou todas as árvores com o herbicida padrão utilizado na indústria frutífera. O administrador irá utilizar o mesmo herbicida, a menos que ele tenha evidência de que a proporção p de árvores infectadas seja inferior a 10%. Se ele estiver convencido de que $p < 0.10$, então irá utilizar um herbicida mais barato, mas que é sabido ser menos eficiente. Para auxiliar na sua decisão, o administrador selecionou aleatoriamente uma amostra de árvores do pomar. Se a amostra trouxer evidência suficiente para o administrador de que $p < 0.10$, então ele irá utilizar o herbicida mais barato, caso contrário, se não houver evidência suficiente para concluir que $p < 0.10$, ele utilizará o herbicida padrão.

Nota: *O administrador está basicamente interessado em determinar se a proporção de árvores infectadas é menor do que* 10% $(p < 0.10)$.

Definição:

Um ***teste de hipótese (ou teste estatístico)*** é um procedimento para se determinar se a evidência que uma amostra fornece é suficiente para concluirmos se o parâmetro populacional está num intervalo específico (GRAYBILL, IVER & BURDICK, 1998)[1] (determinado pelo pesquisador).

7.1. Componentes de um Teste de Hipótese.

i) **Hipótese Nula e Hipótese Alternativa:** para conduzir um teste de hipótese, vamos considerar duas afirmações a respeito do parâmetro as quais chamaremos de ***hipótese nula*** e ***hipótese alternativa***.

A ***hipótese nula***, denotada por $\mathbf{H_0}$, é uma afirmação sobre o valor do parâmetro (p.ex. a média), e que deve sempre conter a condição de igualdade. Por exemplo, em testes de hipótese para a média tem-se:

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_0: \mu \geq \mu_0 \qquad H_0: \mu \leq \mu_0$$

"Testamos a hipótese nula, no sentido em que, supondo-a verdadeira, procuramos chegar a uma conclusão que nos leve à sua rejeição."

[1] GRAYBILL, F.; IVER, H.K. & BURDICK, R.K. - Applied Statistics, a first course in Inference, Prentice Hall, 1998.

A ***hipótese alternativa***, denotada por $\mathbf{H_A}$ (ou $\mathbf{H_1}$), é a afirmação que deve ser verdadeira se a hipótese nula for falsa. Por exemplo:

$$\mathbf{H_A: \mu \neq \mu_0} \qquad \mathbf{H_A: \mu < \mu_0} \qquad \mathbf{H_A: \mu > \mu_0}$$

No exemplo da temperatura corporal podemos ter as hipóteses:

Hipótese Nula: $\mathbf{H_0}: \mu = 98.6$
Hipótese Aternativa: $\mathbf{H_A}: \mu < 98.6$ $\Rightarrow$ teste unicaudal ou unilateral

ou

Hipótese Nula: $\mathbf{H_0}: \mu = 98.6$
Hipótese Aternativa: $\mathbf{H_A}: \mu \neq 98.6$ $\Rightarrow$ teste bicaudal ou bilateral

A questão agora consiste em: como definir H_0 e H_A?

Para se conduzir um teste de hipótese é importante que as ***hipóteses nula e alternativa*** sejam ***escolhidas corretamente***.
Esta escolha é de responsabilidade do pesquisador.

Para a correta escolha de H_0 e H_A, apresentaremos duas situações em que testes de hipótese são realizados:

a) Suponha que o pesquisador deseja testar uma ***situação pré-estabelecida*** ou uma ***afirmação alheia***, então, este conhecimento (ou afirmação) deverá ser escolhido como a ***hipótese nula***.
Ex: *temperatura corporal*, *controle do peso de caixas de cereais*.

b) Se o pesquisador deseja obter evidência para dar ***suporte a uma argumentação*** ou para ***apoiar uma afirmação sua***, então, essa afirmação deve ser formulada de modo que se torne a ***hipótese alternativa***.

Ex: *aplicação do herbicida na plantação de maçãs*.

ii) Erro Tipo I e Erro Tipo II: Ao testarmos uma hipótese chegamos a uma ***decisão*** (de rejeitar ou não H_0) que pode ser ***correta*** ou ***incorreta***.

Ao concluirmos a favor, ou contra H_0, estamos sujeitos a ***dois tipos de erros***.

		Situação real	
		H_0 é verdadeira	H_0 é falsa
Nossa Decisão	Rejeitar H_0	***Erro Tipo I*** (Rejeitar H_0, quando H_0 é verdadeira)	Decisão correta
	Não Rejeitar H_0	Decisão correta	***Erro Tipo II*** (Não Rejeitar H_0, quando H_0 é falsa)

***Exemplo de erro do tipo I*:**

Baseado no resultado $\bar{x} = 98.2F$, rejeitar a hipótese de que a temperatura média do corpo humano é $\mu = 98.6F$, quando a média é de fato $98.6F$.

iii) Nível de significância do teste: a ***probabilidade de se rejeitar H_0, quando H_0 é verdadeira***, é chamada de ***nível de significância*** do teste e será denotada por α.

$$\alpha = P(Erro\ Tipo\ I) = P(Rejeitar\ H_0 \mid H_0\ é\ verdadeira)$$

Nota: A ***probabilidade do Erro Tipo II*** será denotada por β, isto é

$$\beta = P(Erro\ Tipo\ II) = P(Não\ rejeitar\ H_0 \mid H_0\ é\ falsa)$$

iv) Estatística Teste: é a ***estatística amostral***, cujo valor baseado nos dados será utilizado para a tomada de decisão a respeito da hipótese nula. Está associada à ***distribuição de probabilidade do estimador*** do parâmetro que se deseja testar.

No teste para uma média utilizam-se as estatísticas Z ou t

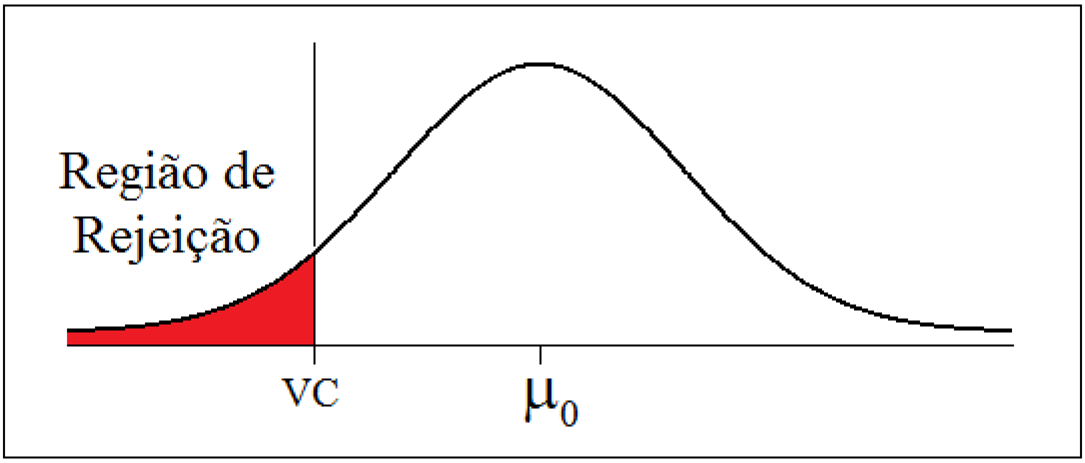
$$Z = \frac{(\overline{X} - \mu)}{\sigma / \sqrt{n}},$$ se a variância populacional é conhecida

$$t = \frac{(\overline{X} - \mu)}{s / \sqrt{n}},$$ se a variância populacional não é conhecida

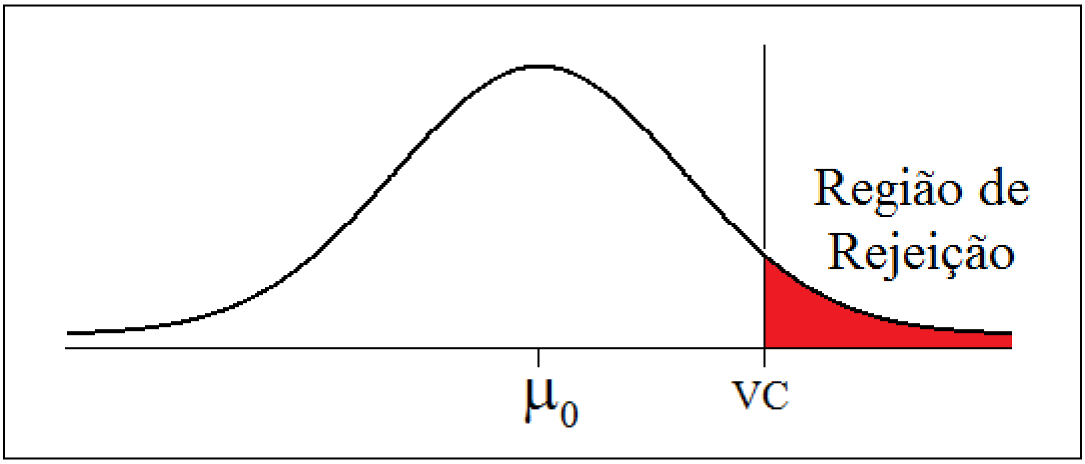
v) Região de Rejeição: ou ***região crítica***, é formada pelo ***conjunto de valores que levam à rejeição de*** H_0.
É subconjunto do espaço paramétrico $\boldsymbol{\Theta}$.

A região que não leva à rejeição de H_0 será chamada de ***região de não rejeição*.**

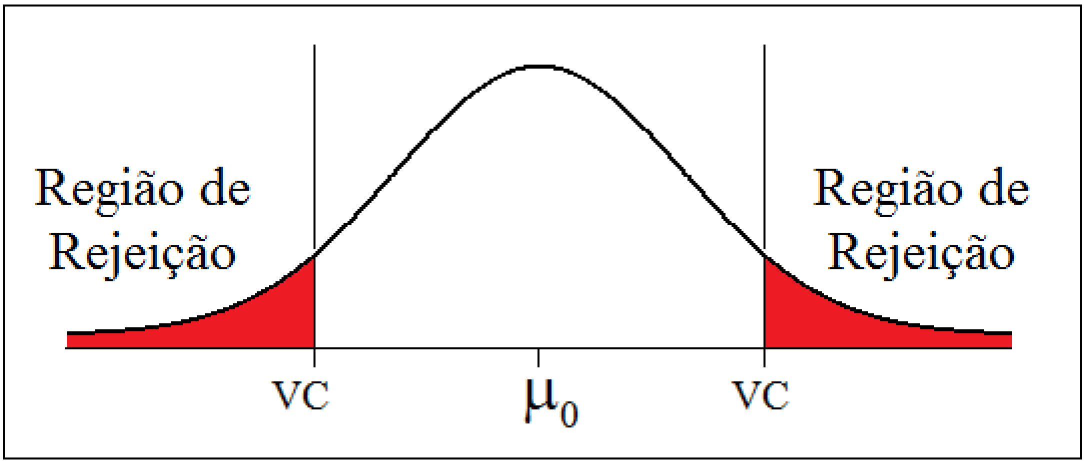
O valor que delimita a região de rejeição e a região de não rejeição será chamado de ***valor crítico***.



Região de rejeição para o teste unicaudal para a média (cauda inferior)



Região de rejeição para o teste unicaudal para a média (cauda superior)



Região de rejeição para o teste bicaudal para a média

Nota: O teste de hipótese consiste em encontrar a região de rejeição de H_0, o que equivale a construir intervalos de confiança.

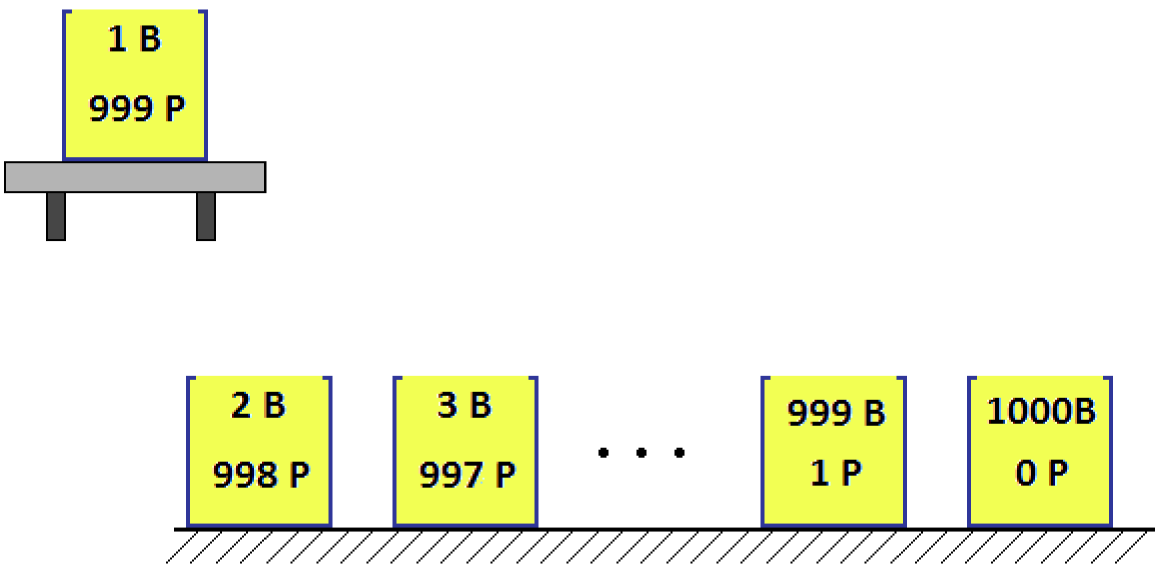
Concluindo:

Um teste estatístico é conduzido para se determinar se a ***amostra traz evidência suficiente*** para se rejeitar H_0 e, assim, concluir que H_A é verdadeira. Ou seja, o teste estatístico é usado para se concluir a favor de H_A ao se concluir que H_0 pode ser rejeitada.

Neste sentido, testar uma hipótese pode ser visto como ***"testar a hipótese nula"***.

Nós ilustraremos esse processo com o exemplo a seguir:

Exemplo: Suponha que temos 1000 caixotes idênticos e que cada caixote tem 1000 bolas que são indistinguíveis exceto pela cor. O primeiro caixote fica numa prateleira e tem 1 bola branca e 999 pretas. Os demais caixotes ficam todos no chão e têm, respectivamente, 2 bolas brancas e 998 pretas; 3 brancas e 997 pretas, até o último que tem 1000 bolas brancas e nenhuma preta (ver figura)



Um caixote foi danificado e levado a um inspetor, sendo informado que era um caixote que estava no chão.

Decidindo investigar, o inspetor irá conduzir um teste estatístico para determinar se há evidência suficiente para concluir que a informação é verdadeira.

Hipóteses: H_0: O caixote danificado veio da prateleira

H_A: O caixote danificado veio do chão

A ***evidência amostral*** para o teste será dada pela ***cor de uma bola*** selecionada aleatória do caixote danificado.

Há duas possibilidades: a bola selecionada é branca ou a bola selecionada é preta

1ª. Possibilidade: a bola selecionada é branca

Se o caixote danificado for da prateleira, a probabilidade da bola ser branca é de **1/1000 = 0.001**.

Essa probabilidade é muito pequena, portanto, a bola sendo branca indica que é improvável que o caixote danificado seja o da prateleira.

No entanto, não seria improvável que a bola branca tenha sido selecionada de um dos caixotes do chão.

Logo, tendo sido observada uma bola branca:

"a evidência da amostra nos leva a rejeitar H_0***"***

2ª. Possibilidade: A bola selecionada é preta:

Se o caixote danificado for o da prateleira, a probabilidade da bola selecionada ser preta é **0.999**.

Essa probabilidade não é suficientemente pequena a ponto de tornar improvável que o caixote seja o da prateleira, não havendo razão para se rejeitar H_0.

No entanto, isso não significa que H_0 seja verdadeira, uma vez que é também provável que a bola preta tenha vindo de uma das caixas do chão.

Logo, tendo sido observada uma bola preta:

"não há evidência suficiente na amostra para se rejeitar H_0"

Concluindo:

a) Em um teste de Hipótese, se a ***evidência contida na amostra*** é suficiente para convencer o pesquisador de que a *hipótese* H_0 é *falsa*, então, a hipótese alternativa H_A será considerada verdadeira.

Neste caso, o resultado do teste será ***"rejeita-se H_0"***.

b) Por outro lado, se a ***evidência da amostra*** não é suficiente para convencer o pesquisador de que a *hipótese* H_0 é *falsa*, o resultado do teste será ***"não se rejeita H_0"***.

Importante: A decisão de "*não se rejeitar* H_0" ***não significa*** que a evidência da amostra seja suficiente para concluirmos que H_0 ***seja verdadeira***.

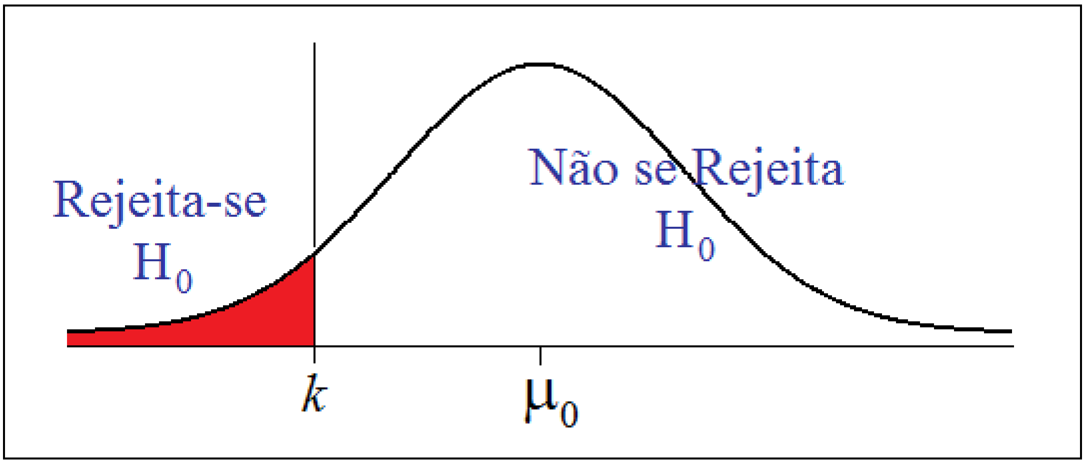
7.2. Teste de Hipótese para uma média, com σ^2 conhecido

7.2.1. Teste unicaudal na cauda inferior:

Hipóteses: $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_A : \mu < \mu_0 \end{cases}$

A ***região de rejeição*** para o teste é dada pelo intervalo $(-\infty; k)$, ou seja, se o valor da média amostral $\overline{X}$ for inferior a constante k, então ***rejeitamos*** H_0.

Por outro lado, se o valor de $\overline{X}$ for superior a constante k, então ***não rejeitamos*** H_0.



Procedimento para o teste: fixa-se o nível de significância α e calcula-se

$$\alpha = P(Rejeitar\ H_0 \mid H_0\ é\ verdadeira)$$

$$= P(\overline{X} \in R.R. \mid H_0\ é\ verdadeira)$$

$$= P(\overline{X} < k \mid \mu = \mu_0)$$

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

A ***estatística teste*** será definida por: $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ que, pelo T.L.C., tem distribuição Normal com média 0 e variância 1. Desta forma,

$$\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_a \quad \Rightarrow \quad k = \mu_0 + Z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

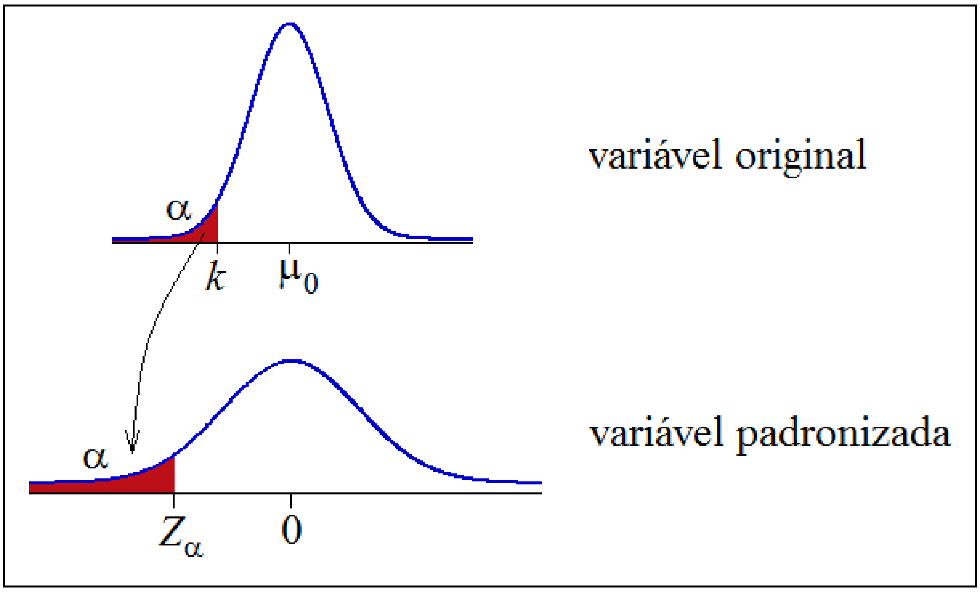
Assim sendo, se $\begin{cases} \bar{X} < k \;\Rightarrow\; Rejeita-se \;\; H_0 \\ \bar{X} \geq k \;\Rightarrow\; Não\, se\, Rejeita \;\; H_0 \end{cases}$

Uma ***forma mais apropriada*** para o teste de hipótese para a média consiste em calcular o ***valor observado da estatística teste***, denotado por Z_0, e compará-lo com o respectivo valor na escala padronizada.

$$Z_0 = \frac{(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Desta forma, para o teste unilateral na cauda inferior, compara-se o ***valor observado da estatística teste*** com o percentil Z_α da distribuição normal padronizada.

Se $\begin{cases} Z_0 < Z_\alpha \;\Rightarrow\; Rejeita-se \;\; H_0 \\ Z_0 \geq Z_\alpha \;\Rightarrow\; Não\, se\, Rejeita \;\; H_0 \end{cases}$



Exemplo 1) Uma empresa imobiliária fez um levantamento do valor de mercado de 16 residências do vilarejo Águas Claras com a intenção de estabelecer negócios na nova região. Na sua região de origem, os valores dos imóveis deste mesmo padrão têm preço médio de 284 mil dólares e desvio padrão de 64 mil dólares. Tendo como referência o valor de imóveis de sua região de origem, a firma quer verificar se pode manter o mesmo critério de avaliação para as residências de Águas Claras.

Valores observados (mil dólares):

297	257	269	183	309	229
243	204	192	209	189	187
432	271	324	275		

Dados: $\sum x = 4070$ e $\sum x^2 = 1100596$

a) Com um nível de significância de 5%, defina as hipóteses e faça o teste unilateral.

b) Qual é a probabilidade de significância (ou valor p) do teste?

c) Calcule $P[\bar{X} > 257.68 \mid \mu = 230]$. Como esse valor é interpretado?

d) Calcular essa probabilidade para diversos valores de μ e construir o gráfico correspondente.

μ	220.0	225.0	230.0	240.0	257.68	270.0	280.0	290.0
β	0.00926	0.021	0.042	0.135	0.500	0.779	0.918	0.978

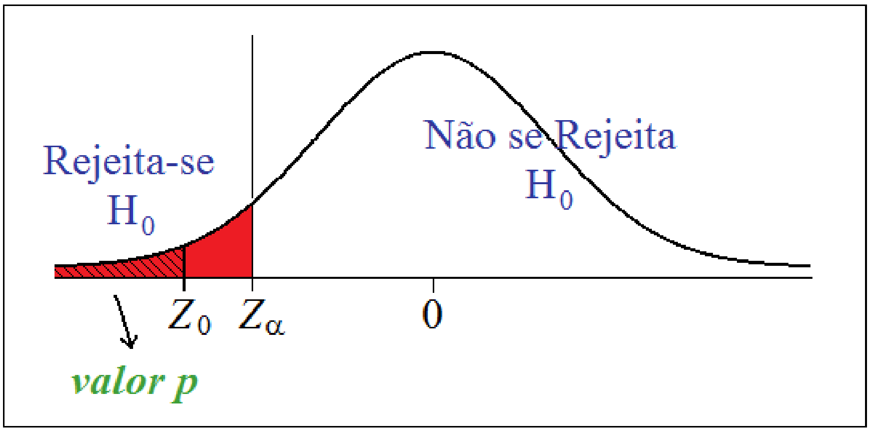
e) Sabendo que a região de rejeição é definida pelo valor 246.72, qual é o nível de significância?

O valor *p* do teste, ou probabilidade de significância, é definido por:

$$p = P(Z > |Z_0|)$$

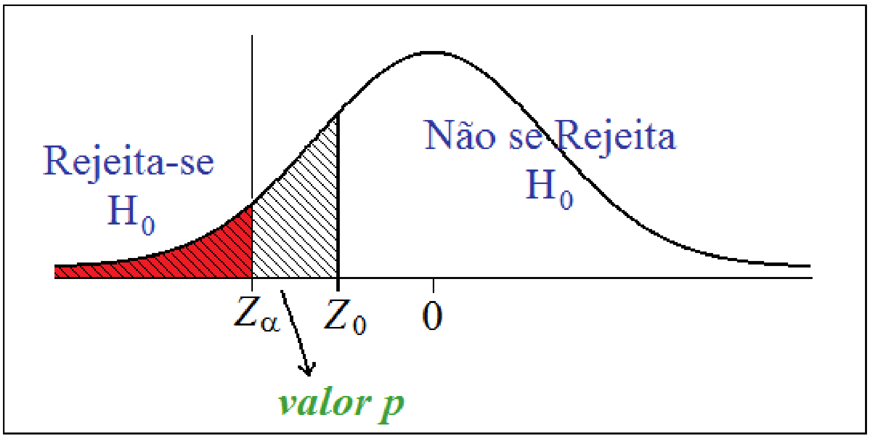
Pode-se utilizar o valor ***p*** para se testar H_0 comparando-o com o nível de significância α:

a) Se p é menor do que o nível de significância α, então, o valor da ***estatística teste*** Z_0 pertence à ***região de rejeição***:



Valor p: região hachurada na figura

b) Se p é maior do que o nível de significância α, então, o valor da ***estatística teste*** Z_0 pertence à ***região de não rejeição***:



Valor p: região hachurada na figura

Neste sentido, o nível de significância α serve somente como ***referência*** para a nossa decisão de rejeitar (ou não) H_0.

Exemplo 1.1) Testar a hipótese utilizando-se do valor p. ($\alpha = 0.05$)

$$\bar{x} = 254.375 \quad \Rightarrow \quad Z_0 = \frac{254.375 - 284}{64/\sqrt{16}} = -1.85$$

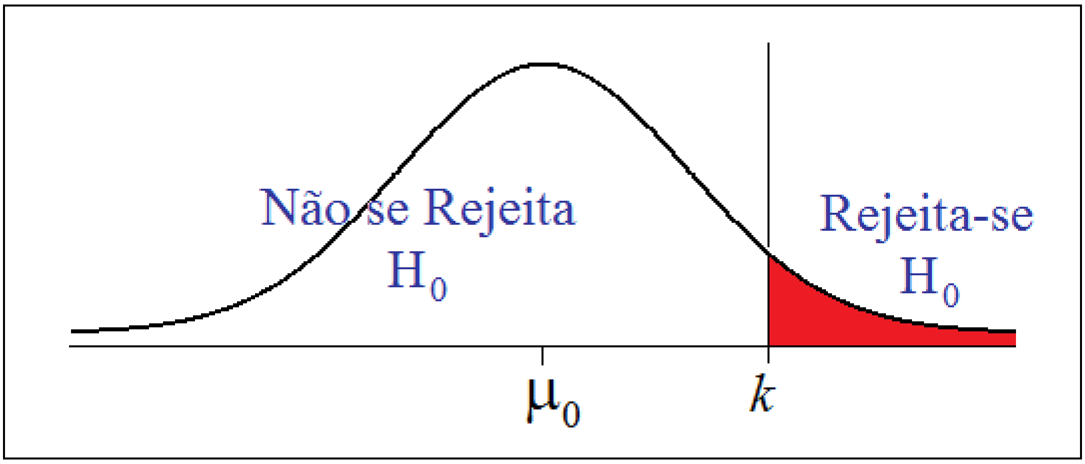
Logo, $p = P(Z > |-1.85|) = 0.0322$

Como $0.0322 < 0.05$, então, ***rejeita-se*** H_0.

7.2.2. Teste unicaudal na cauda superior:

Hipóteses: $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_A : \mu > \mu_0 \end{cases}$

O teste unilateral na cauda superior segue o mesmo raciocínio, com a ***região de rejeição*** sendo definida por $(k; +\infty)$:



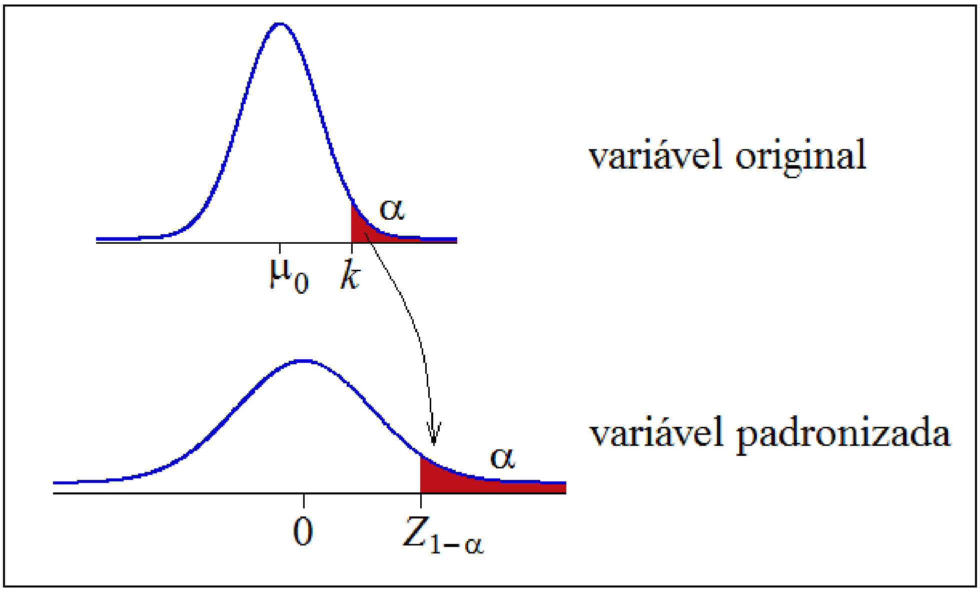
De forma análoga:

$$\alpha = P\left(\bar{X} > k \mid \mu = \mu_0\right) \quad \Rightarrow \quad k = \mu_0 + Z_{(1-a)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Assim sendo, se $\begin{cases} \bar{X} > k \Rightarrow \textit{Rejeita} - \textit{se } H_0 \\ \bar{X} \le k \Rightarrow \textit{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$

Pelo valor observado da estatística teste: $Z_0 = \dfrac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma / \sqrt{n}}$

$$\text{Se} \quad \begin{cases} Z_0 > Z_{(1-\alpha)} \Rightarrow \textit{Rejeita} - \textit{se } H_0 \\ Z_0 \leq Z_{(1-\alpha)} \Rightarrow \textit{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$$



O **valor *p*** do teste é calculado da mesma maneira, ou seja:

$$p = P\left(Z > |Z_0|\right)$$

Exemplo 2) Numa indústria de autopeças, sabe-se que o nível de dureza de um produto feito a base de cerâmica tem variabilidade σ^2 = 0.49. Uma amostra de 16 peças foram testadas e o resultado é apresentado abaixo.

a) Com um nível de significância de 10%, testar a hipótese unicaudal de que a média é igual a 18.4. Calcule o valor *p*.

b) Calcule a probabilidade de erro tipo II para μ = 19.0. Interprete o resultado.

Valores observados:	18.1	19.0	18.8	18.5	18.1	18.8	18.1	18.0
	18.5	19.8	17.8	19.1	18.0	19.2	19.8	19.2

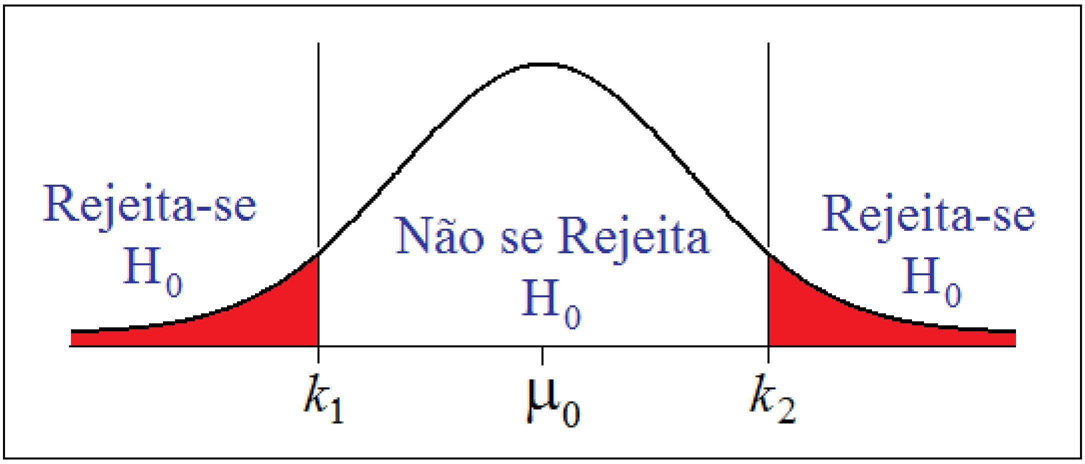
Dados: $\sum x = 298.8$ e $\sum x^2 = 5586.22$

7.2.3. Teste bicaudal:

Hipóteses: $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_A : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

O teste bicaudal é definido pela ***região de rejeição*** $(-\infty; k_1) \cup (k_2; +\infty)$, $k_1 < k_2$, ou seja, se o valor da média amostral $\bar{X}$ for inferior a constante k_1 ou superior a k_2, então ***rejeita-se*** H_0.

Por outro lado, se $k_1 \leq \bar{X} \leq k_2$, então ***não se rejeita*** H_0.



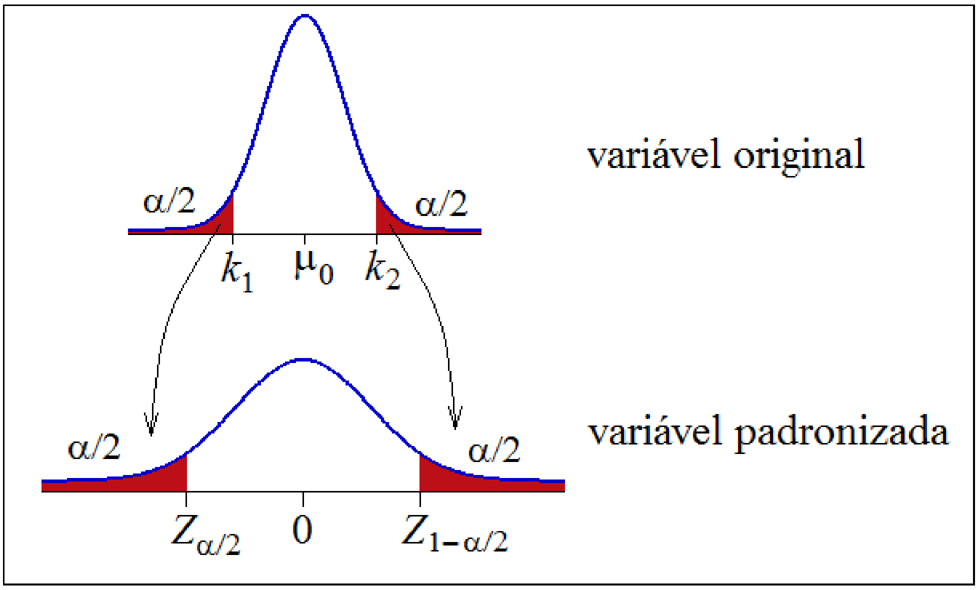
$$\alpha = P\left(\bar{X} < k_1 \quad ou \quad \bar{X} > k_2 \mid \mu = \mu_0\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{k_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + P\left(Z > \frac{k_2 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Logo, $k_1 = \mu_0 + Z_{a/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ e $k_2 = \mu_0 + Z_{1-a/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Pelo valor observado da estatística teste: $Z_0 = \dfrac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma / \sqrt{n}}$

Se $\begin{cases} Z_0 < Z_{\alpha/2} \;\; ou \;\; Z_0 > Z_{1-\alpha/2} & \Rightarrow \; Rejeita - se \;\; H_0 \\ Z_{\alpha/2} \leq Z_0 \leq Z_{1-\alpha/2} & \Rightarrow \; Não\; se\; Rejeita \;\; H_0 \end{cases}$



Pelo fato da hipótese ser bicaudal, o **valor *p*** do teste utiliza a mesma expressão, porém, multiplicada por 2.

$$p = 2P(Z > |Z_0|)$$

Resumindo:

1) Valor Observado (Estatística Observada): é dada por $Z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

2) Valor *p* do teste: probabilidade máxima do erro tipo I:

- $p = P(Z > |Z_0|) \Rightarrow$ testes unicaudais nas caudas superior ou inferior;

- $p = 2P(Z > |Z_0|) \Rightarrow$ teste bicaudal.

Como realizar o teste através do valor *p*:

Os testes de hipótese podem ser realizados através do valor p, que é o que observamos nos softwares estatísticos.

- Se o valor p for ***maior ou igual*** a um nível de significância fixado, ou seja, se $p \geq \alpha$, $\Rightarrow$ ***não se rejeita*** H_0;

- Se o valor p for ***menor do que*** o nível de significância α, ou seja, se $p < \alpha$, $\Rightarrow$ ***rejeita-se*** H_0.

Exemplo 3) Refazer os exemplos (1) e (2) considerando hipóteses bicaudais.

7.3. Teste de Hipótese para uma média, com σ^2 desconhecido

Quando a variância σ^2 é desconhecida, devemos utilizar a sua estimativa s^2. Neste caso, utilizaremos a distribuição t – *Student* no lugar da normal:

As ***regiões de rejeição*** são obtidas da mesma forma como anteriormente, apenas substituindo-se o quantil Z_α da normal pelo quantil $t_{n-1;\alpha}$ da distribuição t – *Student* com $(n-1)$ graus de liberdade.

7.3.1. Teste unicaudal na cauda inferior:

Hipóteses: $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_A : \mu < \mu_0 \end{cases}$

A ***região de rejeição*** para o teste é dada pelo intervalo $(-\infty; k)$, ou seja, se o valor da média amostral $\bar{X}$ for inferior a constante k, então ***rejeitamos*** H_0.

Logo, $\dfrac{k-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = t_{n-1;\alpha} \quad \Rightarrow \quad k = \mu_0 + t_{n-1;\alpha}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$

Estatística teste: $t = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$,

tem distribuição t – *Student* com $(n-1)$ graus de liberdade.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$

Se $\begin{cases} t_0 < t_{n-1;\alpha} & \Rightarrow \ Rejeita - se \ \ H_0 \\ t_0 \geq t_{n-1;\alpha} & \Rightarrow \ Não \ se \ Rejeita \ \ H_0 \end{cases}$

Valor *p*: $p = P\left(T_{n-1} > \left| t_0 \right| \right)$,

Se $\begin{cases} p < \alpha & \Rightarrow \ Rejeita - se \ \ H_0 \\ p \geq \alpha & \Rightarrow \ Não \ se \ Rejeita \ \ H_0 \end{cases}$

Exemplo 4) Os corretores da empresa imobiliária verificaram que não é apropriado considerar os valores dos imóveis no novo vilarejo como tendo mesma variabilidade da sua região de origem. Desta forma, decidiu-se refazer os cálculos com a variância desconhecida. $(\mu_0 = 284)$

Dados: $\sum x = 4070$ e $\sum x^2 = 1100596$

a) Com um nível de significância de 5%, defina as hipóteses e faça o teste unilateral.

b) Qual é a probabilidade de significância (ou valor p) do teste?

c) Calcule $P\left[\overline{X} > 255.08 \mid \mu = 230\right]$. Como esse valor é interpretado?

d) Calcular essa probabilidade para diversos valores de μ e construir o gráfico correspondente.

μ	220.0	225.0	230.0	240.0	257.68	270.0	280.0	290.0
β	0.025	0.044	0.075	0.188	0.500	0.810	0.924	0.974

e) Sabendo que a região de rejeição é definida pelo valor 248.845, qual é o nível de significância?

7.3.2. Teste unicaudal na cauda superior:

Hipóteses: $\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0 \\ \mathrm{H}_A : \mu > \mu_0 \end{cases}$

A ***região de rejeição*** para o teste é dada pelo intervalo $(k;\infty)$, ou seja, se o valor da média amostral $\overline{X}$ for maior do que a constante k, então ***rejeitamos*** H_0.

Logo, $\dfrac{k-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = t_{n-1;1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad k = \mu_0 + t_{n-1;1-\alpha}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$

Estatística teste: $t = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$

Se $\begin{cases} t_0 > t_{n-1;1-\alpha} \Rightarrow \mathit{Rejeita-se}\ H_0 \\ t_0 \le t_{n-1;1-\alpha} \Rightarrow \mathit{Não\ se\ Rejeita}\ H_0 \end{cases}$

Valor *p*: $p = P\left(T_{n-1} > \left|t_0\right|\right)$,

Se $\begin{cases} p < \alpha \Rightarrow \mathit{Rejeita-se}\ H_0 \\ p \ge \alpha \Rightarrow \mathit{Não\ se\ Rejeita}\ H_0 \end{cases}$

7.3.3. Teste bicaudal:

Hipóteses: $\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0 \\ \mathrm{H}_A : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

A ***região de rejeição*** para o teste é dada pelo intervalo $(a\,;b)$, ou seja, se o valor da média amostral $\bar{X}$ for menor do que a constante a ou maior do que b, então ***rejeita-se*** H_0.

$$\alpha = P(\bar{X} < a \quad \text{ou} \quad \bar{X} > b \mid \mu = \mu_0)$$

$$= P\left(T_{n-1} < \frac{a-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right) + P\left(T_{n-1} > \frac{b-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right)$$

Logo, $a = \mu_0 + t_{n-1;a/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ e $b = \mu_0 + t_{n-1;(1-a/2)}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$.

Estatística teste: $t = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$

Se $\begin{cases} t_0 < t_{n-1;\alpha/2} \text{ ou } t_0 > t_{n-1;(1-\alpha/2)} \Rightarrow \textit{Rejeita-se } H_0 \\ t_{n-1;\alpha/2} \leq t_0 \leq t_{n-1;(1-\alpha/2)} \Rightarrow \textit{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$

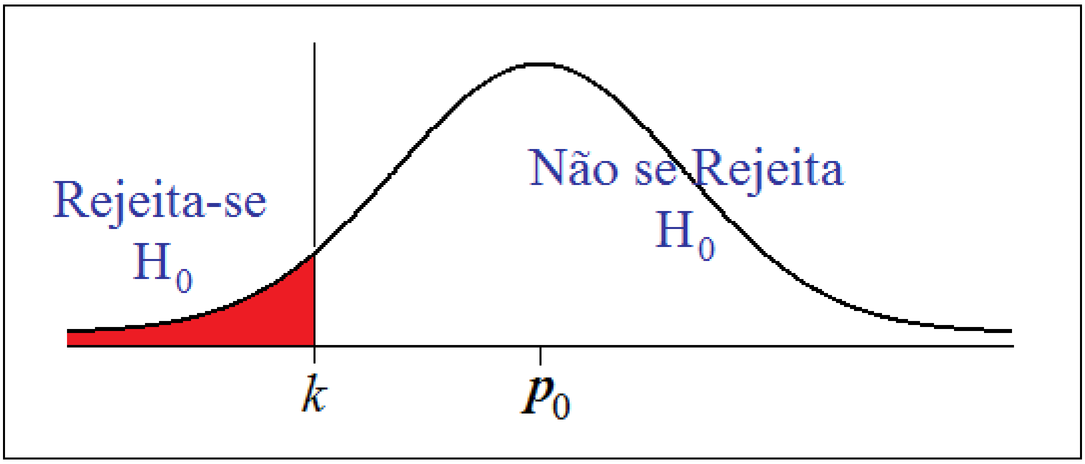
Valor *p*: $p = 2P(T_{n-1} > |t_0|)$, Se $\begin{cases} p < \alpha \Rightarrow \text{Rejeita} - \text{se } H_0 \\ p \geq \alpha \Rightarrow \text{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$

7.4. Teste de Hipótese para a proporção

O teste de hipótese para a proporção é similar ao teste para a média, uma vez que a proporção p é, e fato, a média de uma variável dicotômica.

7.4.1. Teste unicaudal na cauda inferior:

Hipóteses: $\begin{cases} \mathrm{H}_0 : p = p_0 \\ \mathrm{H}_A : p < p_0 \end{cases}$



Região de Rejeição

Valor Observado da Estatística teste: $Z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

Se $\begin{cases} Z_0 < Z_\alpha \Rightarrow \text{Rejeita} - \text{se } H_0 \\ Z_0 \geq Z_\alpha \Rightarrow \text{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$

Valor *p*: $p = P\left(Z > \left| Z_0 \right|\right)$.

7.4.2. Teste unicaudal na cauda superior:

Hipóteses: $\begin{cases} \mathrm{H_0}: \ p = p_0 \\ \mathrm{H_A}: \ p > p_0 \end{cases}$

Valor Observado da Estatística teste: $Z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

Se $\begin{cases} Z_0 > Z_\alpha & \Rightarrow \ Rejeita-se \ \ H_0 \\ Z_0 \leq Z_\alpha & \Rightarrow \ Não \ se \ Rejeita \ \ H_0 \end{cases}$

Valor *p*: $p = P\left(Z > \left| Z_0 \right|\right)$

7.4.3. Teste bicaudal:

Hipóteses: $\begin{cases} \mathrm{H_0}: \ p = p_0 \\ \mathrm{H_A}: \ p \neq p_0 \end{cases}$

Valor Observado da Estatística teste: $Z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

Se $\begin{cases} Z_0 < Z_{\alpha/2} \;\; ou \;\; Z_0 > Z_{1-\alpha/2} \;\Rightarrow\; Rejeita - se \;\; H_0 \\ Z_{\alpha/2} \le Z_0 \le Z_{1-\alpha/2} \;\Rightarrow\; Não\, se\, Rejeita \;\; H_0 \end{cases}$

Valor *p*: $p = 2P\left(Z > \left| Z_0 \right|\right).$

7.5. Teste de Hipótese para comparação de duas médias

A seguir serão apresentados os testes para comparação entre as médias de duas *populações independentes*. Iremos apresentar apenas o teste bicaudal, sendo os testes unicaudais construídos de maneira similar aos casos anteriores.

7.5.1. Variâncias conhecidas.

Hipóteses: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_A : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$

No caso em que as variâncias são conhecidas, sabemos que a estatística teste é dada por:

$$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0\,;\,1).$$

Como estamos testando a igualdade das médias, então, sob a hipótese nula a diferença $(\mu_1 - \mu_2)$ é igual a zero.

Assim sendo, a **estatística teste** se resume a:

$$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Valor Observado: $Z_0 = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$.

Se $\begin{cases} Z_0 < Z_{\alpha/2} \text{ ou } Z_0 > Z_{1-\alpha/2} \Rightarrow \text{Rejeita} - \text{se } H_0 \\ Z_{\alpha/2} \le Z_0 \le Z_{1-\alpha/2} \Rightarrow \text{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$

Obs: uma vez definida a ***estatística teste*** e calculado o seu ***valor observado***, a regra de decisão não muda, dependendo apenas da ***distribuição de probabilidade associada***.

Valor *p*: O valor p do teste é calculado pela expressão:

$$p = 2P\left(Z > |Z_0|\right).$$

Se $\begin{cases} p < \alpha \Rightarrow \text{Rejeita} - \text{se } H_0 \\ p \ge \alpha \Rightarrow \text{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$

7.5.2. Variâncias iguais e desconhecidas.

Hipóteses: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_A : \mu_1 \ne \mu_2 \end{cases}$

No caso das variâncias serem iguais, porém desconhecidas, utilizamos a ***variância combinada*** s_p^2 como estimativa da variância comum:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\,s_2^2 + (n_2 - 1)\,s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Padronizando a diferença entre as médias amostrais teremos:

Estatística Teste: $$\frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}.$$

Valor observado da Estatística Teste:

$$t_0 = \frac{\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}.$$

Obs: lembremos que, sob $\mathbf{H_0}$, $\mu_1 - \mu_2 = 0$.

Logo, tendo sido observado o valor t_0 acima, temos a seguinte ***regra de decisão*** para a comparação entre as duas médias:

Se $\begin{cases} t_0 < t_{n_1+n_2-2;\alpha/2} \ \text{ ou } \ t_0 > t_{n_1+n_2-2;(1-\alpha/2)} \ \Rightarrow \ \textit{Rejeita-se } \ H_0 \\ t_{n_1+n_2-2;\alpha/2} \leq t_0 \leq t_{n_1+n_2-2;(1-\alpha/2)} \ \Rightarrow \ \textit{Não se Rejeita } \ H_0 \end{cases}$

Valor *p*: $p = 2P\left(T_{n_1+n_2-2} > \left|t_0\right|\right).$

Se $\begin{cases} p < \alpha \ \Rightarrow \ \textit{Rejeita-se } \ H_0 \\ p \geq \alpha \ \Rightarrow \ \textit{Não se Rejeita } \ H_0 \end{cases}$

7.5.3. Variâncias desconhecidas e diferentes.

Hipóteses: $\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ \mathrm{H}_A : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$

Quando as variâncias σ_1^2 e σ_2^2 forem diferentes e desconhecidas, devemos utilizar as suas estimativas amostrais s_1^2 e s_2^2.

A **Estatística Teste**, neste caso, é dada por:

$$T = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}},$$

que tem distribuição *t-Student* com ν graus de liberdade, onde

$$\nu = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2 / n_1\right)^2}{\left(n_1 - 1\right)} + \dfrac{\left(s_2^2 / n_2\right)^2}{\left(n_2 - 1\right)}}$$

Valor observado: $$t_0 = \frac{\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

Com a ***regra de decisão:***

$$\text{Se}\begin{cases} t_0 < t_{\nu;\alpha/2} \text{ ou } t_0 > t_{\nu;(1-\alpha/2)} & \Rightarrow \textit{Rejeita} - \textit{se} \;\; H_0 \\ t_{\nu;\alpha/2} \le t_0 \le t_{\nu;(1-\alpha/2)} & \Rightarrow \textit{Não se Rejeita} \;\; H_0 \end{cases}$$

Probabilidade de significância do teste:

Valor *p*: $p = 2P\left(T_\nu > \left| t_0 \right|\right)$.

$$\text{Se}\quad\begin{cases} p < \alpha & \Rightarrow \textit{Rejeita} - \textit{se} \;\; H_0 \\ p \ge \alpha & \Rightarrow \textit{Não se Rejeita} \;\; H_0 \end{cases}$$

7.6. Exemplos para a comparação de duas médias

Exemplo 5) Duas marcas de veículos pretendem comparar o desempenho de seus modelos populares. Para isso, a marca **A** selecionou $n = 12$ veículos de sua produção e fez um teste de consumo. A marca **B** também retirou uma amostra com $n = 12$ veículos e realizou o mesmo teste. As empresas afirmam que ambas têm a mesma variabilidade, $\sigma^2 = 0.81$.
(os dados estão em km/litro).

A	13.5	12.8	11.4	10.9	11.9	12.3	$\bar{x}_{\mathbf{A}} = 11.81$
	10.7	11.9	10.9	11.5	11.8	12.1	$s_{\mathbf{A}} = 0.8163$
B	12.8	12.8	13.6	13.8	10.1	11.1	$\bar{x}_{\mathbf{B}} = 12.12$
	11.9	11.4	10.8	12.2	12.4	12.5	$s_{\mathbf{B}} = 1.1118$

Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: \mu_{\mathbf{B}} = \mu_{\mathbf{A}} \\ H_A: \mu_{\mathbf{B}} \neq \mu_{\mathbf{A}} \end{cases} \quad \text{que equivale a} \quad \begin{cases} H_0: \mu_{\mathbf{B}} - \mu_{\mathbf{A}} = 0 \\ H_A: \mu_{\mathbf{B}} - \mu_{\mathbf{A}} \neq 0 \end{cases}$$

Estatística teste: $$\frac{\left(\overline{X}_{\mathbf{B}} - \overline{X}_{\mathbf{A}}\right) - \left(\mu_{\mathbf{B}} - \mu_{\mathbf{A}}\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n_{\mathbf{B}}} + \dfrac{\sigma^2}{n_{\mathbf{A}}}}} \sim N(0;1)$$

$$\alpha = P\left(k_1 < \overline{X}_{\mathbf{B}} - \overline{X}_{\mathbf{A}} < k_2\right)$$

$$\alpha = P\left(\frac{k_1 - (\mu_{\mathbf{B}} - \mu_{\mathbf{A}})}{\sqrt{\dfrac{0.81}{12} + \dfrac{0.81}{12}}} < Z < \frac{k_2 - (\mu_{\mathbf{B}} - \mu_{\mathbf{A}})}{\sqrt{\dfrac{0.81}{12} + \dfrac{0.81}{12}}}\right)$$

Sob H_0: $\mu_{\mathbf{B}} - \mu_{\mathbf{A}} = 0$, logo

$$\alpha = P\left(\frac{k_1}{\sqrt{\dfrac{0.81}{12} + \dfrac{0.81}{12}}} < Z < \frac{k_2}{\sqrt{\dfrac{0.81}{12} + \dfrac{0.81}{12}}}\right)$$

Igualando cada membro da desigualdade pelo respectivo percentil da distribuição normal, tem-se:

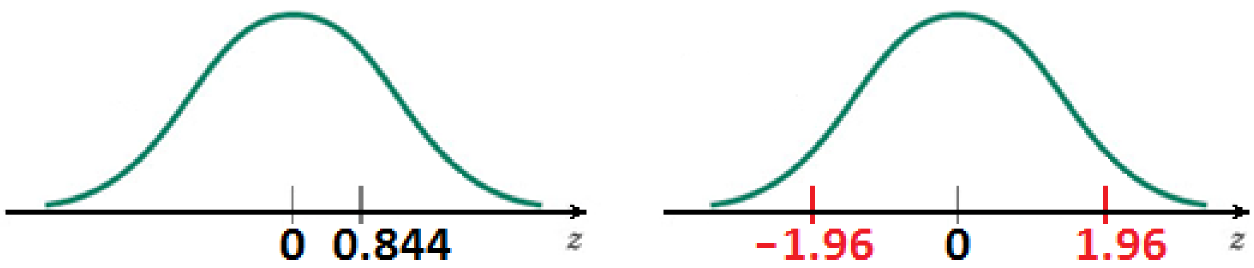
$$\frac{k_1}{\sqrt{\frac{0.81}{12}+\frac{0.81}{12}}} = Z_{\alpha/2} \qquad \text{e} \qquad \frac{k_2}{\sqrt{\frac{0.81}{12}+\frac{0.81}{12}}} = Z_{1-\alpha/2},$$

de onde se obtêm k_1 e k_2.

Podemos, ainda, calcular o ***valor observado da estatística teste***, dado por

$$Z_0 = \frac{(\bar{x}_\mathbf{B} - \bar{x}_\mathbf{A})}{\sqrt{\frac{0.81}{12}+\frac{0.81}{12}}} = \frac{0.31}{\sqrt{\frac{1.62}{12}}} = 0.844.$$

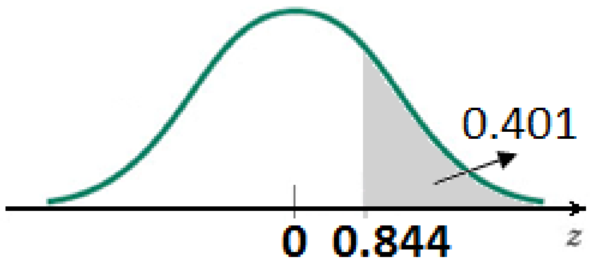
O valor Z_0 é, então, comparado com o quantil $\alpha/2$ da cauda direita da distribuição normal padrão. Para um nível de sigunificância $\alpha = 0.05$, temos $Z_{0.975} = 1.96$

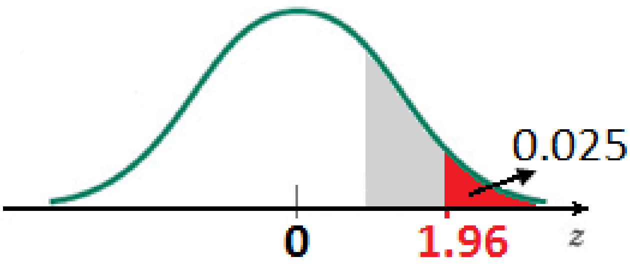


Como **0.844 < 1.96**, então ***não se rejeita H₀.***

Valor *p* do teste:

$$p = 2P(Z > |Z_0|) = 2P(Z > 0.844) = 2 \cdot 0.2005 = 0.401$$





Comparando-se o valor p com um nível de significância de referência (p.ex. 0.05) vemos que p = 0.401 é ***muito alto***, o que nos leva a ***não rejeitar H_0.***

Exemplo 6) O Estatístico contratado para fazer os cálculos não confiando no valor da variância ($\sigma^2 = 0.81$), decidiu refazer as contas considerando as ***variâncias desconhecidas***, porém iguais.

Variância combinada:

$$s_p^2 = \frac{(n_\mathbf{B}-1)s_\mathbf{B}^2 + (n_\mathbf{A}-1)s_\mathbf{A}^2}{(n_\mathbf{B}+n_\mathbf{A}-2)}$$

$$= \frac{(12-1)(1.1118)^2 + (12-1)(0.8163)^2}{(12+12-2)}$$

$$= \frac{11(1.1118)^2 + 11(0.8163)^2}{22}$$

$$= \frac{(1.1118)^2 + (0.8163)^2}{2} = 0.9512$$

Estatística teste:
$$\frac{(\bar{X}_{\mathbf{B}}-\bar{X}_{\mathbf{A}})-(\mu_{\mathbf{B}}-\mu_{\mathbf{A}})}{\sqrt{\dfrac{s_p^2}{n_{\mathbf{B}}}+\dfrac{s_p^2}{n_{\mathbf{A}}}}} \sim t_{n_{\mathbf{B}}+n_{\mathbf{A}}-2}$$

ou ainda:
$$\frac{(\bar{X}_{\mathbf{B}}-\bar{X}_{\mathbf{A}})-(\mu_{\mathbf{B}}-\mu_{\mathbf{A}})}{s_p\sqrt{\dfrac{1}{n_{\mathbf{B}}}+\dfrac{1}{n_{\mathbf{A}}}}} \sim t_{n_{\mathbf{B}}+n_{\mathbf{A}}-2}$$

Que tem o valor observado:

$$t_0=\frac{(x_{\mathbf{B}}-x_{\mathbf{A}})}{\sqrt{\dfrac{s_p^2}{n_{\mathbf{B}}}+\dfrac{s_p^2}{n_{\mathbf{A}}}}}=\frac{0.31}{\sqrt{\dfrac{0.9512}{12}+\dfrac{0.9512}{12}}}=0.7786\,.$$

Comparando-se t_0 com o quantil $(1-\alpha)$ da distribuição *t-Student* com 22 graus de liberdade, temos

$$t_{22;0.025}=2.0739 \;>\; 0.7786\,.$$

Portanto, conclui-se que a evidência na amostra ***não nos permite rejeitar*** a hipótese de igualdade entre as médias das duas populações.

O **valor *p*** nesse caso é dado por:

$$p=2P(T_{22}>|t_0|)=2P(T_{22}>0.7786)$$

$$p=2\cdot 0.222=0.444$$

Exemplo 7) Alguns inspetores, *ainda mais desconfiados*, foram investigar as informações e descobriram que a empresa **B** havia omitido 4 valores de sua amostra. São eles: 10.0; 10.5; 10.6 e 11.5. Com isso, refeitos os cálculos, obteve-se:

$$\bar{x}_{\mathbf{A}} = 11.75 \qquad \text{e} \qquad s_{\mathbf{B}} = 1.1894.$$

Considerando, agora, ***variâncias diferentes e desconhecidas***, testar para a igualdade de médias com um nível significância de 0.05.

Estatística teste:
$$\frac{\left(\bar{X}_{\mathbf{B}} - \bar{X}_{\mathbf{A}}\right) - \left(\mu_{\mathbf{B}} - \mu_{\mathbf{A}}\right)}{\sqrt{\dfrac{s_{\mathbf{B}}^2}{n_{\mathbf{B}}} + \dfrac{s_{\mathbf{A}}^2}{n_{\mathbf{A}}}}} \sim t_\nu$$

Em que:
$$\nu = \frac{\left(\dfrac{s_{\mathbf{B}}^2}{n_{\mathbf{B}}} + \dfrac{s_{\mathbf{A}}^2}{n_{\mathbf{A}}}\right)^2}{\dfrac{\left(s_{\mathbf{B}}^2 / n_{\mathbf{B}}\right)^2}{\left(n_{\mathbf{B}} - 1\right)} + \dfrac{\left(s_{\mathbf{A}}^2 / n_{\mathbf{A}}\right)^2}{\left(n_{\mathbf{A}} - 1\right)}}$$

No caso, temos

$$\nu = \frac{\left[\dfrac{(1.1894)^2}{16} + \dfrac{(0.8163)^2}{12}\right]^2}{\dfrac{\left[(1.1894)^2 / 16\right]^2}{15} + \dfrac{\left[(0.8163)^2 / 12\right]^2}{11}} =$$

$$\nu = \frac{\left[0.08842 + 0.05553\right]^2}{\dfrac{\left[0.08842\right]^2}{15} + \dfrac{\left[0.05553\right]^2}{11}} = 25.85 \approx 26 \text{ graus de liberdade}$$

Valor observado:

$$t_0 = \frac{\left(\bar{x}_{\mathbf{B}} - \bar{x}_{\mathbf{A}}\right)}{\sqrt{\frac{s_{\mathbf{B}}^2}{n_{\mathbf{B}}} + \frac{s_{\mathbf{A}}^2}{n_{\mathbf{A}}}}} = \frac{11.75 - 11.81}{\sqrt{\frac{1.1894}{16} + \frac{0.8163}{12}}} = -0.1590,$$

comparado com o quantil 0.025 da *t-Student* com 26 *gl*, temos

$$t_{26;0.025} = 2.056 \;>\; 0.1590,$$

logo, não rejeitamos a hipótese nula.

Valor *p*:

$$p = 2P\left(T_{26} > |t_0|\right) = 2P\left(T_{26} > 0.1590\right)$$

$$p = 2 \cdot 0.4374 = 0.875$$

Obs: Apesar de ter sido considerado $\nu = 26$ (inteiro), pode-se encontrar o valor t para *graus de liberdade não inteiros*. De fato, pelo R, obtêm-se $t_{25.85;0.975} = 2.0561$.

Perguntas:

1) Na sua opinião, qual das duas marcar é a mais econômica? P.Q.?

2) Se você fosse escolher dentre as duas marcas, qual escolheria? P.Q.?

Como na maioria das vezes as variâncias são desconhecidas, é prudente, inicialmente, fazer uma investigação para verificar se estas podem ser consideradas iguais.

A seguir será apresentado o teste de hipótese para a igualdade de duas variâncias.

7.7. Teste de Hipótese para comparação de duas variâncias.

A distribuição *F* (de Snedcor): Considere que temos duas *amostras independentes* de tamanhos n_1 e n_2, retiradas de duas populações normais *com mesma variância* σ^2. Então:

$$U = \frac{(n_1 - 1)s_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_1-1)} \quad \text{e} \quad V = \frac{(n_2 - 1)s_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_2-1)}$$

A estatística definida por : $$W = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{U/(n_1-1)}{V/(n_2-1)},$$

tem distribuição F com $(n_1 - 1\ ;\ n_2 - 1)$ graus de liberdade, ou seja:

$$W = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{n_1-1;\, n_2-1}$$

7.7.1. Teste unicaudal para comparação de duas variâncias

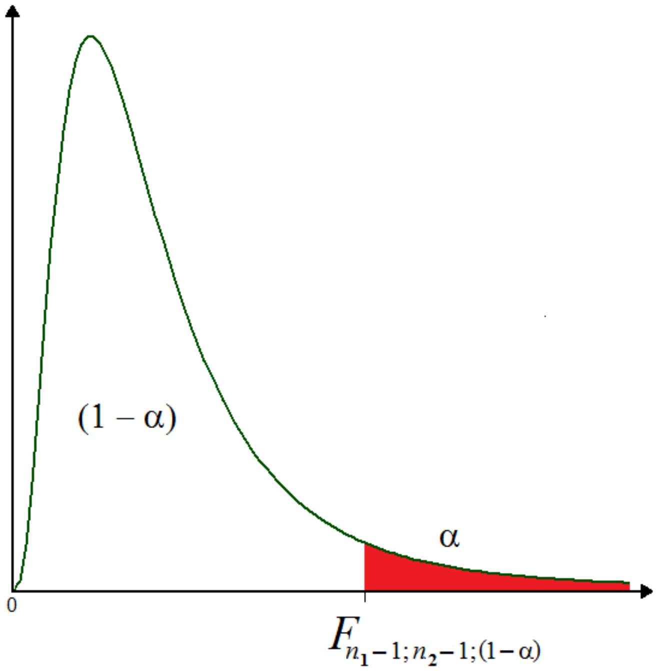
Hipóteses: $$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ \mathrm{H}_\mathrm{A} : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$\alpha = P(W \in R.R. \mid H_0) = P(W > f \mid H_0)$$

obs: Tomamos W de tal forma que $W > 1$*, ou seja, devemos ter a maior variância amostral no numerador . Desta forma, o teste será sempre realizado na cauda superior da distribuição. Logo,* f é tal que:

$$\alpha = P(W > f \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2) = P(W > F_{n_1-1,\, n_2-1;\alpha})$$

$$\Rightarrow \quad f = F_{n_1-1,\, n_2-1;\alpha}$$



Como a distribuição de W é exata, comparamos o seu valor observado, $W_0 = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$, diretamente com o percentil da distribuição F.

Portanto:

Se $\begin{cases} W_0 > F_{n_1-1,n_2-1;\alpha} \Rightarrow \ Rejeita-se \ \ H_0 \\ W_0 \le F_{n_1-1,n_2-1;\alpha} \ \Rightarrow \ Não\ se\ Rejeita \ \ H_0 \end{cases}$

Valor *p* do teste: O valor p do teste é a probabilidade máxima do erro tipo I, ou seja:

$p = P\left(W > W_0\right)$, para o **teste unicaudal**.

7.7.2. Teste bicaudal para comparação de duas variâncias

Hipóteses: $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$

$$\alpha = P\left(W \in R.C. \mid H_0\right) = P\left(W < f_1 \; ou \; W > f_2 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$$

f_1 e f_2 são definidos de tal forma que: $P\left(f_1 \leq W \leq f_2\right) = 1 - \alpha$.

Como a distribuição de W é exata, então, comparamos o seu valor observado $W_0 = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ diretamente com os percentis $\alpha/2$ da distribuição F com $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ graus de liberdade.

Portanto:

Se $\begin{cases} W_0 < F_{n_1-1,\, n_2-1;\alpha/2} \;\text{ ou }\; W_0 > F_{n_1-1,\, n_2-1;1-\alpha/2} \Rightarrow \; Rejeita-se \;\; H_0 \\ F_{n_1-1,\, n_2-1;\alpha/2} \leq W_0 \leq F_{n_1-1,\, n_2-1;1-\alpha/2} \;\Rightarrow\; Não\; se\; Rejeita \;\; H_0 \end{cases}$

Valor *p* do teste: O valor p do teste para o **teste bicaudal** é dado por

$$p = 2P\left(W > W_0\right)$$

7.8. Exemplos.

1) Uma empresa apresentou a um fabricante uma nova máquina de embalar macarrão. O gerente da empresa afirma que a nova máquina empacota em média, 60 pacotes por minuto, com desvio padrão de 3 pacotes. O número de pacotes embalados por minuto tem distribuição normal. A fábrica de macarrão usou a máquina em suas instalações e observou o número de pacotes embalados, em 25 períodos distintos de um minuto, constatando 58 pacotes embalados. O comprador desconfia que a máquina não consiga chegar aos 60 pacotes. O que você conclui?

2) Uma companhia de cigarros anuncia que o índice médio de nicotina dos seus cigarros apresenta-se abaixo de 23 mg por cigarro. Um laboratório analisa 6 cigarros obtendo: 27, 24, 21, 25, 26, 22. Sabe-se que o índice de nicotina se distribui normalmente com variância igual a 4.86 mg^2. Pode-se aceitar, ao nível de 10%, a afirmação do fabricante.

3) Uma estação de televisão afirma que 60% dos telespectadores estavam ligados no seu programa especial da última segunda-feira. Um canal concorrente contestando tal afirmação decide coletar uma amostra com 200 famílias e perguntar se o programa escolhido pela família era o programa do canal concorrente. Na amostra foram registradas 104 respostas afirmativas. O que você conclui ao nível de 5% de significância?

4) O professor(a) de Estatística 2 afirma que, historicamente, os alunos realizam as provas desta disciplina em 120 minutos. Para que os alunos realizem a prova no tempo normal de aula o professor adotou outro tipo de prova, registrando o tempo de realização da prova na amostra de 23 alunos matriculados na turma B da disciplina em 2012. O tempo médio observado foi de 112 minutos e o desvio padrão foi 20 minutos. Estes resultados trazem evidências estatísticas da melhora desejada peo(a) professor(a)?

5) A estatura dos alunos da turma A – 2º sem/2012 de Estatística 2 são mostradas no quadro abaixo, segundo o sexo.

Podemos afirmar que as estaturas médias entre sexo são iguais?

sexo	alturas						
Masc	1.78	1.81	1.69	1.75	1.78	1.89	1.80
	1.67	1.67	1.83	1.85	1.74	1.89	1.77
Fem	1.67	1.68	1.67	1.60	1.63	1.59	

7.9. Teste de Hipótese para Duas Proporções

Muitas vezes há o interesse em se comparar duas proporções p_1 e p_2, como por exemplo:

- Num determinado grupo a proporção de fumantes do sexo masculino é igual a do sexo feminino?
- A intenção de votos de um candidato é a mesma em duas capitais?
- No tratamento de uma enfermidade, a proporção de cura de um novo tratamento é a mesma que a do convencional?

Nessas circunstâncias pode-se aplicar tanto o teste unicaudal como o bicaudal. A seguir apresentaremos apenas a construção do teste bicaudal, que é o mais aplicado.

Hipóteses: $\begin{cases} \mathrm{H}_0: \ p_1 = p_2 \\ \mathrm{H}_\mathrm{A}: \ p_1 \neq p_2 \end{cases}$

Que é equivalente a:

Hipóteses: $\begin{cases} \mathrm{H}_0: \ p_1 - p_2 = 0 \\ \mathrm{H}_\mathrm{A}: \ p_1 - p_2 \neq 0 \end{cases}$

Estatística teste: $$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}.$$

Sendo H_0 verdadeira, temos que $p_1 = p_2 = p_*$. Logo, a estimativa da variância $Var(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ pode ser calculada por:

$$Var(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \hat{p}_*(1 - \hat{p}_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right),$$

em que: $\hat{p}_* = \dfrac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$,

com: X_1 = número de sucessos da *população* 1
X_2 = número de sucessos da *população* 2.

Desta forma, a **estatística teste** é escrita por:

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}_*(1 - \hat{p}_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Valor Observado: sob H_0 $p_1 - p_2 = 0$, então

$$Z_0 = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}_*(1 - \hat{p}_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}.$$

Se $\begin{cases} Z_0 < Z_{\alpha/2} \;\; ou \;\; Z_0 > Z_{1-\alpha/2} \;\Rightarrow\; Rejeita-se \;\; H_0 \\ Z_{\alpha/2} \le Z_0 \le Z_{1-\alpha/2} \;\Rightarrow\; Não\, se\, Rejeita \;\; H_0 \end{cases}$

Valor *p*: $p = 2P\left(Z > |Z_0|\right)$.

Exemplo: Um candidato em campanha eleitoral deseja saber se a sua intenção de votos é a mesma em duas cidades importantes no cenário político (*Atlântida* e *Flórida*), e definir as estratégias de campanha. Para isso ele contratou um instituto de pesquisa que realizou pesquisas nas duas cidades. Em *Atlântida* foram entrevistados 500 eleitores, dos quais 116 afirmaram votar no candidato, enquanto que, em *Flórida*, dos 600 entrevistados, 105 foram favoráveis a ele. Qual a conclusão que se pode tirar com essas informações? (assumir α = 0.05)

Estimativas pontuais:

Atlântida

$$\hat{p}_1 = \frac{116}{500} = 0.232$$

Flórida

$$\hat{p}_2 = \frac{105}{600} = 0.175$$

Então: $\hat{p}_* = \dfrac{116+105}{500+600} = \dfrac{221}{1100} = 0.201$

Testando a hipótese:

$$Z_0 = \frac{0.232 - 0.175}{\sqrt{0.201 \cdot 0.799 \cdot \left(\frac{1}{500} + \frac{1}{600}\right)}} = \frac{0.057}{0.02426}$$

$$Z_0 = 2.35$$

Valor tabelado: $Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.975} = 1.96$

Como:

$2.35 > 1.96 \quad \Rightarrow$ ***Rejeita-se*** $\mathbf{H_0}$, ou seja, a intenção de votos nas duas cidades não é a mesma
(A intenção de votos na Flórida é menor)

Valor *p* do teste:

$$p = 2P(Z > |2.35|) = 2 \cdot 0.0094 = 0.0188$$

7.10. Teste de Hipótese para Duas Amostras Dependentes (dados pareados)

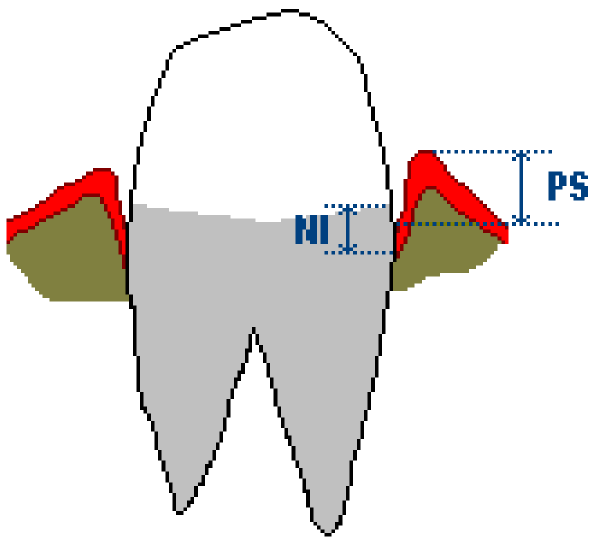
Exemplo: Avaliação da *Raspagem e Alisamento Radicular* – RAR no tratamento da *Periodontite Crônica*.

A ***raspagem e alisamento radicular*** (RAR) é provavelmente a forma mais comum de terapia mecânica empregada no ***tratamento da doença periodontal*** e, também, na manutenção de um periodonto saudável, evitando a recorrência da doença após o tratamento.

Objetivo do Trabalho: realizar uma avaliação clínica de diferentes modalidades de *terapias periodontais não cirúrgicas*, em pacientes portadores de periodontite crônica.

A avaliação foi realizada por meio das medidas clínicas de:

- *profundidade de sondagem* (*PS*);
- *nível de inserção* (*NI*);



Os dados foram coletados em pacientes da disciplina de Periodontia da Faculdade de Odontologia da UNESP, Araraquara. Ao todo foram avaliados 30 pacientes com idade entre 25 e 68 anos com *profundidade de sondagem* inicial entre 6 e 8 mm. Os pacientes foram divididos em três grupos com $n = 10$ indivíduos cada:

Grupo 1 – pacientes submetidos à raspagem supra e subgengival no 1º dia de tratamento;

Grupo 2 – pacientes submetidos à raspagem supragengival no 1º dia de tratamento e raspagem subgengival após o 7º dia;

Grupo 3 – pacientes submetidos à raspagem supragengival no 1º dia de tratamento e raspagem subgengival após o 30º dia.

As variáveis foram observadas longitudinalmente em 5 instantes diferentes, antes dos procedimentos de raspagem:

```
+------+-------+-------------+---------------------------+
0      7      15            30                          60  dias
```

A seguir apresentamos os dados de *PS* dos pacientes do *grupo* 1, coletados no instante inicial e após 15 dias de tratamento.

Paciente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_0	7.3	7.1	7.0	6.7	6.7	6.2	6.1	6.0	7.0	6.5
t_{15}	5.7	6.3	5.3	4.8	3.7	3.6	4.5	4.3	5.3	6.0

Descritivas

	t_0	t_{15}
média	6.66	4.95
desvio padrão	0.4502	0.9289

Objetivo: Verificar se a redução na *PS* foi significativa.

Resultados:

Paciente	t_0	t_{15}
1	7.3	5.7
2	7.1	6.3
3	7.0	5.3
4	6.7	4.8
5	6.7	3.7
6	6.2	3.6
7	6.1	4.5
8	6.0	4.3
9	7.0	5.3
10	6.5	6.0

Para ***eliminar a dependência*** entre as amostras calcula-se a ***diferença*** caso-a-caso, criando uma nova variável:

$$D = X_{t_{15}} - X_{t_0}$$

com valores observados d_i

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

d_i
-1.6
-0.8
-1.7
-1.9
-3.0
-2.6
-1.6
-1.7
-1.7
-0.5

	média $\bar{d}$	desvio padrão s_d
D (*diferença*)	-1.71	0.7310

Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_d = \Delta_0 \\ H_A : \mu_d \neq \Delta_0 \end{cases}$$

O problema, então, fica reduzido a uma variável aplicando-se assim o teste t para uma média

Estatística teste: $$t = \frac{\bar{D} - \Delta_0}{s_d / \sqrt{n}},$$

tem distribuição $t - Student$ com $(n-1)$ graus de liberdade.

No caso em que testamos a igualdade das médias nos dois instantes de medida temos que $\Delta_0 = 0$ e, as hipóteses serão dadas por:

Hipóteses: $\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mu_d = 0 \\ \mathrm{H}_\mathrm{A} : \mu_d \neq 0 \end{cases}$

E a estatística teste será: $t = \dfrac{\overline{D}}{s_d / \sqrt{n}}$,

Nesse caso, como sob H_0 temos $\mu_d = 0$, o teremos o **valor observado da estatística** dado por:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}}.$$

Logo, se $\begin{cases} t_0 < t_{n-1;\alpha/2} \Rightarrow \textit{Rejeita} - \textit{se } H_0 \\ t_0 \geq t_{n-1;\alpha/2} \Rightarrow \textit{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$

Valor *p*: $p = 2P\left(T_{n-1} > \left| t_0 \right|\right)$,

Se $\begin{cases} p < \alpha \Rightarrow \textit{Rejeita} - \textit{se } H_0 \\ p \geq \alpha \Rightarrow \textit{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$

No exemplo, temos que: $t_0 = \dfrac{-1.7}{0.7310/\sqrt{10}} = -7.398$

Valor tabelado: $t_{9;0.025} = -2.262$

Como $-7.398 < -2.262 \quad \Rightarrow$ ***Rejeita-se*** **H_0**,

ou seja, o tratamento resulta numa diminuição média de 1.7mm.

Valor *p*: $p = 2P\left(T_9 > \left| -7.398 \right|\right) = 0.000042$.