Estimação do Tamanho Populacional

José Galvão Leite

DEs - UFSCar

Conferência de Estatística Indutiva

São Carlos, 09/2011

Sumário

Comentários

- LEITE, J. G.; PEREIRA, C. A. de B. (1987)

  An urn model for the multi-sample capture-recapture sequential tagging process.

  Sequential Analysis 6 (2), 179-186.

- LEITE, J. G.; OISHI, J.; PEREIRA, C. A. de B. (1987)

  Exact ML estimate of a finite population size: capture-recapture sequential sample data.

  Probability in the Engineering and Informational Sciences, 1, 225-266.

- LEITE, J. G.; OISHI, J.; PEREIRA, C. A. de B. (1988)

  A note on the exact maximum likelihood estimation of the size of a finite and closed population.

  Biometrics, 75 (1), 178-180.

• N: tamanho de uma população fechada; k épocas de amostragem, $k \geq 2$; processo de seleção.

1° Caso: um elemento é selecionado, ao acaso, em cada seleção (época).

$$U_j = \begin{cases} 1, & \text{se o j-ésimo elemento selecionado é não marcado,} \\ 0, & \text{se o j-ésimo elemento selecionado é marcado,} \end{cases}$$

$$j = 1, \ldots, k.$$

$D_k = \big(U_1, \ldots, U_k\big)$;

$T_k = \sum_{j=1}^{k} U_j =$ "número de elementos distintos selecionados durante o processo".

Distribuições de Probabilidades de D_k e T_k

Modelo de Distribuições de bolas em urnas.

FELLER, W. (1968) An Introduction to Probability Theory and its Applications. 3 ed. Wiley, v. 1.

Ideia: "Dado N, consideremos N urnas e k bolas numeradas de 1 a k. A cada elemento da população associamos uma urna e a j-ésima, $1 \leq j \leq k$, seleção associamos a j-ésima bola. Consideremos o experimento que consiste na distribuição aleatória das k bolas nas N urnas. Neste contexto, selecionar o elemento i da população na j-ésima seleção é equivalente a colocar a j-ésima bola na i-ésima urna".

- $P\big(U_1 = 1|N\big) = 1,$

$$P\Big(D_k = (U_1, U_2, \ldots, U_k) = (1, u_2, \ldots, u_k) \,|\, N\Big) =$$

$P\Big($a bola de número 1 é distribuída aleatoriamente em uma das

N urnas **e** para todo j, $2 \leq j \leq k,$ a bola de número j é distribuída

aleatoriamente em uma das urnas vazias se $u_j = 1$ ou

em uma das urnas já ocupadas se $u_j = 0\Big) =$

$$\frac{N!}{(N-t)!N^k} \prod_{j=2}^{k} \left(\sum_{i=1}^{j-1} u_i \right)^{1-u_j} I_k(t),$$

onde $u_1 = 1, t = \sum_{j=1}^{k} u_j$ e I_k: indicador do conjunto $\big\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq \min\{k, N\}\big\}$.

- $P\Big(T_k = t \,|\, N\Big) =$

$P\Big($exatamente t (N - t) urnas resultam ocupadas (vazias) $\Big)$

$$= \frac{N!}{(N-t)!N^k} \sum_{j=0}^{t} (-1)^{t-j} \frac{j^k}{j!(t-j)!} I_k(t) \qquad (Feller)$$

- T_k é uma estatística suficiente

2° Caso: n_j elementos são selecionados aleatoriamente, sem reposição, na j-ésima etapa, $j = 1, 2, \ldots, k$; $n_j \geq 1$ e $N \geq \max\{n_1, \ldots, n_k\}$.

$U_j =$ número de elementos não marcados selecionados na j-ésima etapa

$D_k = \left(U_1, \ldots, U_k\right)$;

$T_k = \sum_{j=1}^{k} U_j =$ "número de elementos distintos selecionados durante o processo".

Distribuições de Probabilidades de D_k e T_k

Modelo de distribuições de bolas em urnas: extensão do resultado do Feller ($n_j = 1$)

Ideia: "Dado N, $N \geq \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, suponhamos N urnas e um conjunto de k cores distintas. Para cada j, $1 \leq j \leq k$, suponhamos n_j bolas coloridas com a j-ésima cor e numeradas de 1 a n_j. A cada elemento da população associamos uma urna e, em cada etapa j, à i_j-ésima seleção, $1 \leq i_j \leq n_j$, associamos a i_j-ésima bola de cor j. Consideremos o experimento que consiste em se distribuir aleatoriamente, em k passos, as $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ bolas nas N urnas do seguinte modo:

Distribuições de Probabilidades de D_k e T_k

no j-ésimo passo, as n_j bolas de cor j são distribuídas aleatoriamente nas N urnas de tal modo que exatamente n_j urnas resultem ocupadas. Isto é, concluído o j-ésimo passo cada urna conterá, no máximo, uma bola de cada uma das cores $1, 2, \ldots, j$. Nesta situação, selecionar aleatoriamente na j-ésima etapa os elementos $i_1, i_2, \ldots, i_{n_j}$ da população nas $1^\circ, 2^\circ, \ldots, n_j$-ésima seleções, respectivamente, é equivalente a colocar as $1^\circ, 2^\circ, \ldots, n_j$-ésima bolas (de cor j) nas urnas $i_1, i_2, \ldots, i_{n_j}$, respectivamente".

- $P\big(U_1 = n_1 | N\big) = 1,$

Notação:

$$t_j = \sum_{r=1}^{j} u_r, j = 1, 2, \ldots, k;$$

$$t_1 = u_1 = n_1;$$

$$0 \leq u_j \leq n_j, 2 \leq j \leq k;$$

$$m = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\};$$

$$s = \sum_{j=1}^{k} n_j.$$

$\bullet\; P\Big(D_k = (U_1, U_2, \ldots, U_k) = (n_1, u_2, \ldots, u_k) \,|\, N\Big) =$

$P\Big($Na 1° etapa as bolas $1, 2, \ldots, n_1,$ de cor 1, são distribuídas

aleatoriamente nas N urnas de modo a ocuparem exatamente

n_1 urnas **e** no j-ésimo passo, $2 \leq j \leq k,$ as bolas $1, 2, \ldots, n_j,$

de cor j, são distribuídas aleatoriamente nas N urnas,

de tal modo que u_j destas bolas ocupem exatamente u_j urnas

entre as $N - t_{j-1}$ urnas vazias e as restantes $n_j - u_j$ bolas

ocupem exatamente $n_j - u_j$ urnas entre as t_{j-1} já ocupadas$\Big) =$

$$\frac{N!}{(N-t)!}\left[\prod_{j=1}^{k}\binom{N}{n_j}\right]^{-1}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{u_j!}\prod_{j=2}^{k}\binom{t_{j-1}}{n_j-u_j} I_k(t),$$

- $P\Big(T_k = t \,|\, N\Big) =$

$P\Big($exatamente t (N - t) urnas resultam ocupadas (vazias)$\Big) =$

$$\frac{N!}{(N-t)!}\left[\prod_{j=1}^{k}\binom{N}{n_j}\right]^{-1}\frac{1}{t!}\sum_{j=0}^{t}(-1)^{t-j}\binom{t}{j}\binom{j}{n_1}\binom{j}{n_2}\cdots\binom{j}{n_k}I_k(t)$$

onde $t = t_k$ e I_k : indicador do conjunto $\big\{x \in \mathbb{N} : m \leq x \leq \min\{s, N\}\big\}$.

(Extensão do resultado do Feller)

- T_k é uma estatística suficiente.

Função de Verossimilhança

Kernel da função de verossimilhança

$$K(N) = N! \left[(N-t)! \prod_{j=1}^{k} \binom{N}{n_j} \right]^{-1}, \qquad N \geq t,$$

$m \leq t \leq s$.

Estimativas de Máxima Verossimilhança

(1) $t = m$

Suponhamos que $m = n_1$, por exemplo.

$$K(N) = \frac{n_1!}{\prod_{j=2}^{k} \binom{N}{n_j}}, \qquad N \geq n_1,$$

ou seja, $K(N)$ é decrescente e $\widehat{N} = m$.

(2) $t = s$

Então,

$$K(N) = \left[\prod_{j=1}^{k} n_j!\right] \left[\frac{\prod_{j=1}^{s-1}\left(1 - \frac{j}{N}\right)}{\prod_{j=1}^{k}\prod_{r=0}^{n_j-1}\left(1 - \frac{r}{N}\right)}\right], \qquad N \geq s,$$

implica

$$\lim_{N\to\infty} K(N) = \prod_{j=1}^{k} n_j!$$

Para quaisquer reais $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tais que $0 < x_j < 1$,

$$\prod_{j=1}^{k}(1 - x_j) > 1 - \sum_{j=1}^{k} x_j,$$

implica

$$\frac{K(N+1)}{K(N)} = \left(1 - \frac{s}{N+1}\right)^{-1} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{n_j}{N+1}\right) > 1, \qquad N \geq s,$$

ou $K(N) \uparrow \prod_{j=1}^{k} n_j!$ e $\widehat{N} = \infty$.

(3) $m < t < s$

A razão

$$\frac{K(N+1)}{K(N)} = \left(1 - \frac{t}{N+1}\right)^{-1} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{n_j}{N+1}\right), \qquad N \geq t.$$

Consideremos a função

$$f(x) = (1 - tx)^{-1} \prod_{j=1}^{k} (1 - n_j x), \qquad 0 \leq x < t^{-1}.$$

• f é contínua, $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \uparrow t^{-1}} f(x) = \infty$ e

$$f\left(\frac{1}{N+1}\right) = \frac{K(N+1)}{K(N)}, \qquad N \geq t.$$

Comportamento de f:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \qquad 0 \leq x < t^{-1}.$$

$$g(x) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - n_j x\right), \quad h(x) = 1 - tx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- $g'(x) < 0$, $g''(x) > 0 \Longrightarrow g(x)$ contínua, decrescente e convexa no intervalo$[0, t^{-1}]$;
- $h(x)$ decrescente no intervalo $[0, t^{-1}]$;
- $g(0) = h(0) = 1, g(t^{-1}) > 0$ e $h(t^{-1}) = 0$.

Como $(h-g)'$ é contínua em 0 e

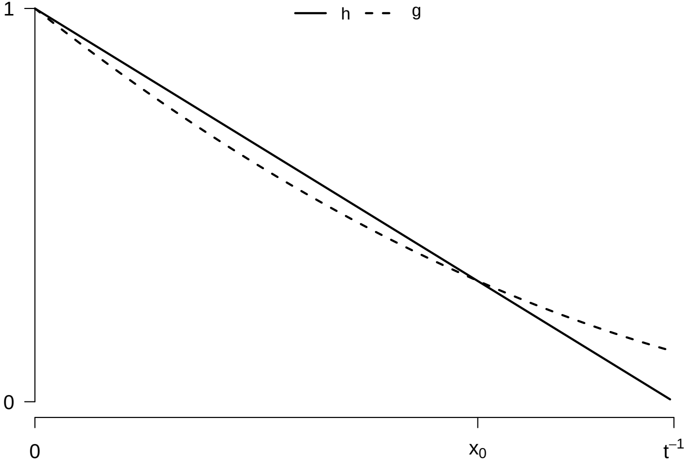
$$(h-g)'(0) = h'(0) - g'(0) = -t + \sum_{j=1}^{k} n_j > 0,$$

então existe δ, $\delta > 0$, tal que

$$(h-g)'(x) = h'(x) - g'(x) > 0, \qquad \forall x \in [0, \delta)$$

e, pelo Teorema da Média,

$$h(x) > g(x), \qquad x \in (0, \delta).$$



h
g
1
0
0
x_0
t^{-1}

Existe um único x_0, $x_0 \in (0, t^{-1})$ tal que

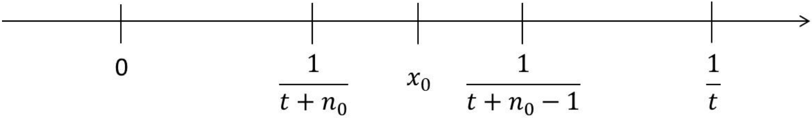
$$\begin{aligned} g(x) &< h(x), \quad x \in (0, x_0); \\ g(x_0) &= h(x_0); \\ g(x) &> h(x), \quad x \in (x_0, t^{-1}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x) &< 1, \qquad x \in (0, x_0); \\ f(x_0) &= 1; \\ f(x) &> 1, \qquad x \in (x_0, t^{-1}). \end{aligned}$$

1°) Hipótese: $x_0 \neq \dfrac{1}{n}$, para n inteiro

Existe n_0 inteiro, $n_0 \geq 1$, tal que



$$f\left(\frac{1}{t+n}\right) = \frac{K(t+n)}{K(t+n-1)} \begin{cases} < 1, & \text{para } n \geq n_0, \\ > 1, & \text{para } n \leq n_0 - 1. \end{cases}$$

Logo,

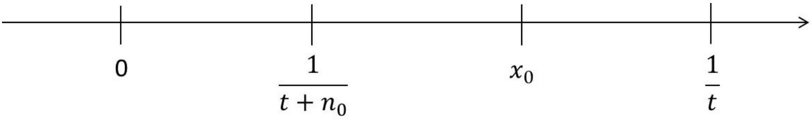
$$K(t) < K(t+1) < \cdots < K(t+n_0-1),$$
$$K(t+n_0-1) > K(t+n_0) > K(t+n_0+1) > \cdots ,$$

o que implica

$$\widehat{N} = t + n_0 - 1;$$

$$\begin{aligned} n_0 &= \min\left\{ n \geq 1 : f\left(\frac{1}{t+n}\right) < 1 \right\} \\ &= \min\left\{ n \geq 1 : \prod_{j=1}^{k} (t+n-n_j) < n(t+n)^{k-1} \right\} \end{aligned}$$

2°) Hipótese: $x_0 = \dfrac{1}{t + n_0 - 1}$ para n_0 inteiro, $n_0 \geq 2$,



$$f\left(\frac{1}{t+n}\right) = \frac{K(t+n)}{K(t+n-1)} \begin{cases} < 1, & \text{para } n \geq n_0, \\ = 1, & \text{para } n = n_0 - 1, \\ > 1, & \text{para } n < n_0 - 1. \end{cases}$$

Logo,

$$K(t) < K(t+1) < \cdots < K(t+n_0-2) = K(t+n_0-1),$$
$$K(t+n_0-1) > K(t+n_0) > K(t+n_0+1) > \cdots,$$

o que implica

$$\widehat{N}_1 = t+n_0-1,\ \widehat{N}_2 = \widehat{N}_1 - 1;$$

n_0 é tal que

$$f\left(\frac{1}{t+n_0-1}\right) = 1 \text{ ou } \prod_{j=1}^{k}(t+n_0-n_j-1) = (n_0-1)(t+n_0-1)^{k-1}$$

Fato: $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$ e $1 < t < k$

(1) $n_0 = \min\left\{n \geq 1 : (t+n-1)^k < n(t+n)^{k-1}\right\}$;

(2) a emv de N é única: não existe n_0, $n_0 \geq 2$, inteiro tal que $(t+n_0-2)^k = (n_0-1)(t+n_0-1)^{k-1}$. Seja $x = t+n_0-1$: inteiro;

$$
\begin{aligned}
&(x-1)^k = (x-t)x^{k-1} \iff \\
&tx^{k-2} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i}(-1)^i x^{k-i-1} = (-1)^{k+1}x^{-1}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Como $x > t > 1$, inteiro, o membro esquerdo de (1) é um inteiro e o membro direito não é um inteiro.

Exemplos

k	$(n_1, n_2, \ldots, n_k)$	t	EMV
2	$(40, 60)$	62	63
		80	119 e 120
3	$(1, 5, 8)$	10	12
		11	16
		12	25
5	$(15, 20, 25, 30, 50)$	60	61
		61	63
		80	95
		90	120
		100	159
		120	347

Modelo Geral

N: tamanho populacional;

p_j: probabilidade de que qualquer elemento seja selecionado na j-ésima etapa;

n_j: número de elementos selecionados na j-ésima etapa;

m_j: número de elementos marcados selecionados na j-ésima etapa ($m_1 = 0$);

$$j = 1, \ldots, k.$$

$t = \sum_{j=1}^{k} (n_j - m_j)$: número de elementos distintos selecionados durante todo o processo,

$$m = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \leq t \leq \sum_{j=1}^{k} n_j = s.$$

$\mathcal{D} = (n_1, m_1; n_2, m_2; \cdots; n_k, m_k)$: dados amostrais.

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$: probabilidades de seleção.

Supondo independência entre as seleções e entre as amostras, função de verossimilhança:

$$
\begin{aligned}
L(N, \mathbf{p}|\mathcal{D}) &= P\big(n_1, m_1; n_2, m_2; \ldots; n_k, m_k | N, \mathbf{p}\big) \\
&= P\big(n_1, m_1 | N, \mathbf{p}\big) \prod_{j=2}^{k} P\big(n_j, m_j | n_1, m_1; \ldots; n_{j-1}, m_{j-1}; N, \mathbf{p}\big) \\
&\propto \frac{N!}{(N-t)!} \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j},
\end{aligned}
$$

$N \geq t$, $0 < p_j < 1$, $1 \leq j \leq k$.

Função de Verossimilhança Condicional

$$L(N, \mathbf{p}|\mathcal{D}) = \underbrace{P\left(m_1, m_2, \ldots, m_k | n_1, n_2, \ldots, n_k, N, \mathbf{p}\right)}_{L_1(N)} \times \underbrace{P\left(n_1, n_2, \ldots, n_k | N, \mathbf{p}\right)}_{L_2(N, \mathbf{p})},$$

$$L_1(N) \quad \propto \quad \frac{N!}{(N-t)!}\left[\prod_{j=1}^{k}\binom{N}{n_j}\right]^{-1}, \quad N \geq t;$$

$$L_2(N, \mathbf{p}) \quad = \quad \prod_{j=1}^{k}\binom{N}{n_j} p_j^{n_j}(1-p_j)^{N-n_j}, \quad N \geq m, 0 < p_j < 1.$$

Inferência Bayesiana

(a) A priori

$$\pi(N) = 1, \quad N \geq 1$$

$$\pi(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{-1}, \quad 0 < p_j < 1,$$

$$\pi(N, \mathbf{p}) = \pi(N)\pi(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{-1} I_{\mathbb{N}^*}(N).$$

A posteriori

$$\pi(N, \mathbf{p}|\mathcal{D}) \propto L(N, \mathbf{p})|\mathcal{D})\pi(N, \mathbf{p})$$

$$\propto \frac{N!}{(N-t)!} \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j - 1}(1 - p_j)^{N - n_j}, \quad N \geq t, 0 < p_j < 1.$$

(i) Se $t \leq \sum_{j=1}^{k} n_j - 2$, então $\pi(N, \mathbf{p}|\mathcal{D})$ existe e

$$\pi(N|\mathcal{D}) \propto \frac{N!}{(N-t)!} \left[\prod_{j=1}^{k} \binom{N}{n_j} \right]^{-1}, \qquad N \geq t.$$

(ii) Se $t \leq s - 3$, então $E(N|\mathcal{D}) < \infty$.

(b) A priori

$$\pi(N) = 1, \quad N \geq 1$$

$$\pi(\mathbf{p}) = 1, \quad 0 < p_j < 1,$$

isto é, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são i.i.d com distribuição Uniforme(0,1).

$$\pi(N, \mathbf{p}) = I_{N^*}(N)$$

A posteriori

$$\pi(N, \mathbf{p}|\mathcal{D}) \propto \frac{N!}{(N-t)!} \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j}(1-p_j)^{N-n_j},$$

$N \geq t$, $0 < p_j < 1$.

(i) $\pi(N, \mathbf{p}|\mathcal{D})$ existe e

$$\pi(N|\mathcal{D}) \propto \frac{N!}{(N-t)!} \left[\prod_{j=1}^{k} \binom{N+1}{n_j+1} \right]^{-1}, \qquad N \geq t$$

(ii) Se $k = 2$ e $t < s$, então $E(N|\mathcal{D}) < \infty$;

Se $k \geq 3$, então $E(N|\mathcal{D}) < \infty$.

Moda da Distribuição a Posteriori

LEITE, J. G.; BOLFARINE, H.; RODRIGUES, J. (1987)

Exact expressions for the posterior mode of a finite population size: capture-recapture sequential sampling. **Revista Brasileira de Probabilidade e Estatística**, 1, 91-100.

$$K(N) = \frac{N!}{(N-t)!}\left[\prod_{j=1}^{k}\binom{N+1}{n_j+1}\right]^{-1}, \qquad N \geq t.$$

(1) $t = m$. Supor $m = n_1$.

$$
\begin{aligned}
K(N) &= \frac{N!}{(N-n_1)!}\left[\prod_{j=1}^{k}\binom{N+1}{n_j+1}\right]^{-1}\\
&= \frac{(n_1+1)!\binom{N+1}{n_1+1}}{N+1}\left[\prod_{j=1}^{k}\binom{N+1}{n_j+1}\right]^{-1}\\
&= \frac{(n_1+1)!}{N+1}\left[\prod_{j=2}^{k}\binom{N+1}{n_j+1}\right]^{-1}\\
&= \frac{\prod_{j=1}^{k}(n_j+1)!}{(N+1)\prod_{j=2}^{k}(N+1)N\cdots(N-n_j)} \downarrow \text{ e } N_M = \text{ moda } = m
\end{aligned}
$$

(2) $t > m$.

A razão

$$\frac{K(N+1)}{K(N)} = \left(1 - \frac{t}{N+1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{N+1}\right)^{-k} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - n_j x\right), \quad N \geq t.$$

Consideremos a função

$$f(x) = (1 - tx)^{-1}(1 + x)^{-k} \prod_{j=1}^{k}(1 - n_j x), \qquad 0 \leq x < t^{-1}$$

• f é contínua, $f(0) = 1$, $\lim_{x \uparrow t^{-1}} = \infty$ e

$$f\left(\frac{1}{N+1}\right) = \frac{K(N+1)}{K(N)}, \qquad N \geq t.$$

Comportamento da f

$$f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}, \qquad 0 \leq x < t^{-1},$$

$$g_1(x) = \prod_{j=1}^{k}(1 - n_j x), \qquad g_2(x) = (1 - tx)(1 + x)^k, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$g_1'(x) < 0, g_1''(x) > 0 \implies g_1$ é contínua, decrescente e convexa no intervalo $[0, t^{-1}]$;

(i) $t \geq k$

$$g_2'(x) < 0, g_2''(x) < 0 \Longrightarrow$$

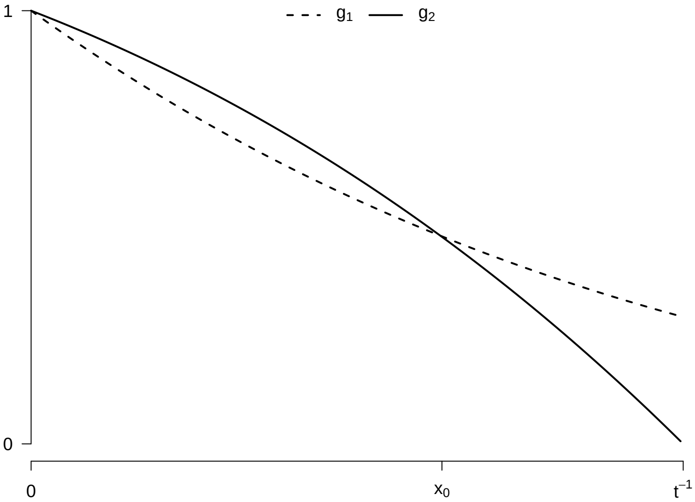
g_2 é contínua, decrescente e côncava no intervalo $[0, t^{-1}]$;

na origem, $g_1(0) = g_2(0) = 1$ e no ponto t^{-1}, $g_1(t^{-1}) > 0$, $g_2(t^{-1}) = 0$;

Como $(g_2 - g_1)'$ é contínua em 0 e $(g_2 - g_1)'(0) = g_2'(0) - g_1'(0) = \sum_{j=1}^{k} n_j + k - t > 0$, então existe δ, $\delta > 0$, tal que $(g_2 - g_1)'(x) = g_2'(x) - g_1'(x) > 0$, para todo $x \in [0, \delta)$ e, pelo Teorema da Média,

$$g_2(x) > g_1(x), \qquad x \in (0, \delta)$$

.


g1
g2
1
0
0
x0
t−1

Existe um ponto x_0, $0 < x_0 < t^{-1}$, tal que $g_1(x_0) = g_2(x_0)$;

$g_1(x) < g_2(x), 0 < x < x_0$;

$$\begin{aligned} g_1(x) &< g_2(x), \quad x \in (0, x_0); \\ g_1(x_0) &= g_2(x_0); \\ g_1(x) &> g_2(x), \quad x \in (x_0, t^{-1}). \end{aligned}$$

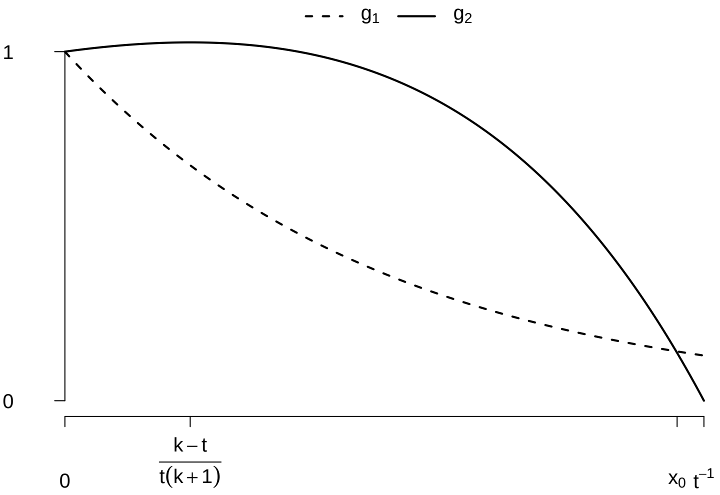
Conclusão:

$$\begin{aligned} f(x) &< 1, \qquad x \in (0, x_0); \\ f(x_0) &= 1; \\ f(x) &> 1, \qquad x \in (x_0, t^{-1}). \end{aligned}$$

(ii) $t < k$

$$\left.\begin{array}{ll} g_2'(x) > 0, & \text{se } 0 < x < \dfrac{k-t}{t(k+1)}, \\ g_2'(x) < 0 \text{ e } g_2''(x) < 0, & \text{se } \dfrac{k-t}{t(k+1)} < x < t^{-1}, \end{array}\right. \Longrightarrow$$

g_2 é contínua e crescente no intervalo $[0, \frac{k-t}{t(k+1)}]$ e decrescente e côncava no intervalo $[\frac{k-t}{t(k+1)}, t^{-1}]$.


g_1
g_2
1
0
0
$\frac{k-t}{t(k+1)}$
x_0
t^{-1}

Existe um ponto x_0, $0 < x_0 < t^{-1}$, tal que

$$\begin{aligned} g_1(x) &< g_2(x), \quad x \in (0, x_0); \\ g_1(x_0) &= g_2(x_0); \\ g_1(x) &> g_2(x), \quad x \in (x_0, t^{-1}). \end{aligned}$$

Logo,

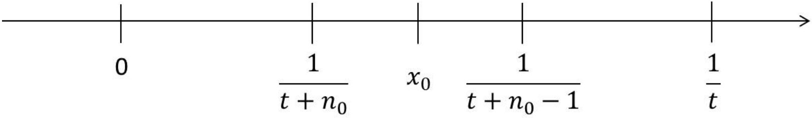
$$\begin{aligned} f(x) &< 1, \qquad x \in (0, x_0); \\ f(x_0) &= 1; \\ f(x) &> 1, \qquad x \in (x_0, t^{-1}). \end{aligned}$$

Fato: $x_0 \neq \frac{1}{n}$, n inteiro, $n > t$.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \text{ para algum } n > t \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n^j - \prod_{j=1}^{k}(n - n_j) - t \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} n^{j-1} = \frac{t}{n}. \qquad (2)$$

O membro esquerdo de (2) é um número inteiro e o direito não é inteiro.



Existe n_0 inteiro, $n_0 \geq 1$ tal que

$$f\left(\frac{1}{t+n}\right) = \frac{K(t+n)}{K(t+n-1)} \begin{cases} < 1, & \text{para } n \geq n_0, \\ > 1, & \text{para } n \leq n_0 - 1. \end{cases}$$

Logo,

$$K(t) < K(t+1) < \cdots < K(t+n_0-1),$$
$$K(t+n_0-1) > K(t+n_0) > K(t+n_0+1) > \cdots,$$

$$N_M = t + n_0 - 1,$$

$$\begin{aligned} n_0 &= \min\left\{n \geq 1 : f\left(\frac{1}{t+n}\right) < 1\right\} \\ &= \min\left\{n \geq 1 : \prod_{j=1}^{k}(t+n-n_j) < \frac{n}{t+n}(t+n+1)^k\right\} \end{aligned}$$

Fato: Se $t > m$, então $N_M = t$ se, e somente se,

$$\prod_{j=1}^{k}(t+1-n_j) < \frac{1}{t+1}(t+2)^k \tag{3}$$

$$\text{Condição (3)} \iff n_0 = 1 \iff N_M = t$$

Exemplos

$(n_1, n_2, \ldots, n_k)$	t	E.M.V	N_M
$(40, 60)$	62	63	63
	80	119 e 120	116
	100	∞	1.299
$(1, 5, 8)$	10	12	11
	11	16	13
	12	25	17
	14	∞	30
$(15, 20, 25, 30, 50)$	60	61	61
	80	95	93
	98	149 e 150	143
	139	7.449	1.336
	140	∞	1.609