



Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

Estimação de Distribuições Bivariadas Discretas

Victor Fossaluzza

Professor Substituto - DEs - UFSCAR
Doutorando - IME - USP

CONFERÊNCIA DE ESTATÍSTICA INDUTIVA



Tópicos

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

1 Introdução

2 Soluções

- Frequências observadas
- Aproximação Por Uma Distribuição Contínua
- Polinômios de Bernstein



Introdução

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

- Trabalho realizado pelos alunos **Marcel Augusto Ferreira da Silva**, **Rodrigo Luiz Longo** e **Tiago João da Silva** do ultimo ano do bacharelado em estatística no IME-USP durante o curso de Estatística Aplicada I (CEA) no semestre passado.
- Este trabalho foi orientado por mim, juntamente com meus mestres e amigos: **prof. Dr. Carlos Alberto de Bragança Pereira** e **prof. Dr. Luís Gustavo Esteves**.
- Dados provenientes de diversas pesquisas realizadas pela **profa. Dra. Amélia Pasqual Marques** do Departamento de Fonoaudiologia, Fisioterapia e Terapia Ocupacional da Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo (FOFITO-FMUSP).



Motivação

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

Soluções

Frequências
observadas

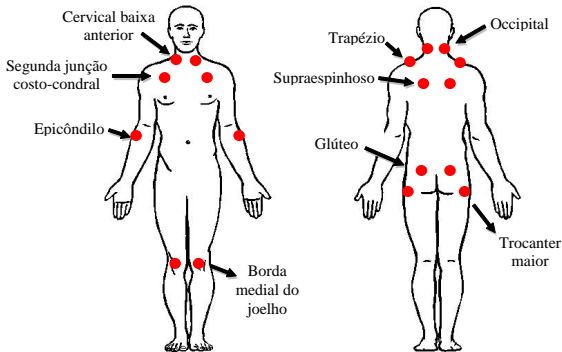
Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

- Essas pesquisas foram realizadas para estudar a qualidade de vida de pacientes com fibromialgia.
- A fibromialgia é uma síndrome de dor crônica e generalizada, que engloba também outras manifestações como fadiga, distúrbios do sono, dispnéia, depressão, etc.
- O diagnóstico da fibromialgia é feito por meio da palpação de pontos anatomicamente específicos, chamados *tender points*.

Tender Points

- A presença de dor (pressão suportada menor que $2,6 \text{ kg/cm}^2$) em ao menos 11 pontos entre os 18 analisados caracteriza a síndrome.



Tender Points

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

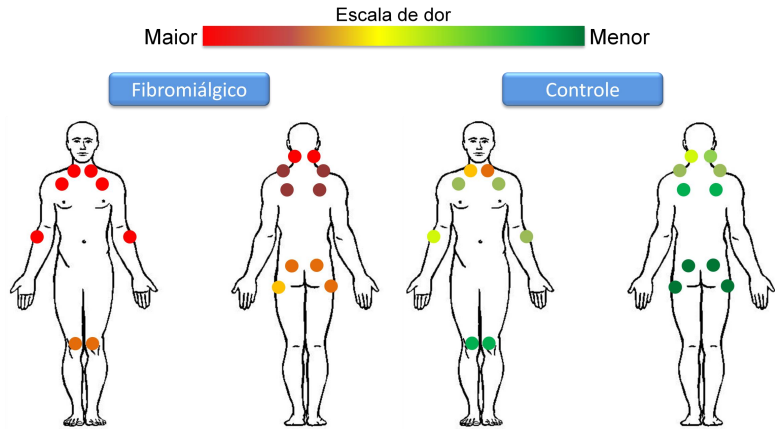
Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein





Motivação

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

- Uma das formas de medir a qualidade de vida em pacientes fibromiálgicos é a avaliação da ansiedade, muito comum nesses indivíduos.
- Para isso, foi utilizado o Inventário de Ansiedade Traço-Estado (IDATE), que é considerado o instrumento padrão na avaliação da ansiedade em pacientes fibromiálgicos
- Este inventário é composto por duas escalas, cada uma delas assume valores no conjunto $\{0, 1, \dots, 60\}$:
 - **ansiedade-traço** que refere-se às diferenças individuais relativamente estáveis para respostas comportamentais.
 - **ansiedade-estado** que refere-se ao estado do paciente em relação à ansiedade no momento da avaliação.



Objetivo

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

- Existe uma forte dependência entre as variáveis Traço e Estado.
- Como se tratam de variáveis discretas, a estimação da distribuição conjunta baseado nas frequências observadas fica limitada devido a presença de zeros.
- Temos 453 (pares de) observações para as variáveis Traço e Estado e precisamos estimar $61 \times 61 = 3721$ pontos!
- **Objetivo:** estimar a distribuição discreta bivariada, inclusive para os pares onde as frequências observadas foram iguais a zero.



Objetivo

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

- Existe uma forte dependência entre as variáveis Traço e Estado.
- Como se tratam de variáveis discretas, a estimação da distribuição conjunta baseado nas frequências observadas fica limitada devido a presença de zeros.
- Temos 453 (pares de) observações para as variáveis Traço e Estado e precisamos estimar $61 \times 61 = 3721$ pontos!
- **Objetivo:** estimar a distribuição discreta bivariada, inclusive para os pares onde as frequências observadas foram iguais a zero.



Tópicos

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

1 Introdução

2 Soluções

- **Frequências observadas**
- Aproximação Por Uma Distribuição Contínua
- Polinômios de Bernstein

Frequências observadas

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

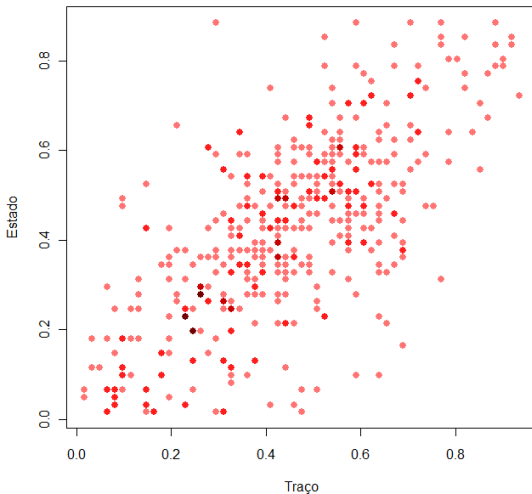
Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein



Função de Distribuição Empírica

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

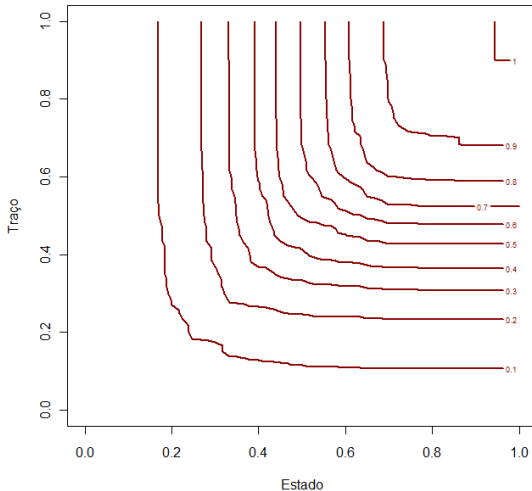
Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein





Frequências observadas: limitações

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

- A estimação da distribuição discreta baseada em frequências observadas é bastante limitada!
- Os pares que não foram observados serão estimadas como sendo zero! Isso não deve ser verdade e essa limitação esta bastante relacionada com o tamanho da amostra observada ser menor que o numero de pontos a serem estimados.
- Portanto, é necessário procurar alternativas para a estimação de distribuições discretas.



Tópicos

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

1 Introdução

2 Soluções

- Frequências observadas
- **Aproximação Por Uma Distribuição Contínua**
- Polinômios de Bernstein



Exemplo: Aproximação Pela Normal - Caso Univariado

Estimação de Distribuições Bivariadas Discretas

Victor Fossaluzza

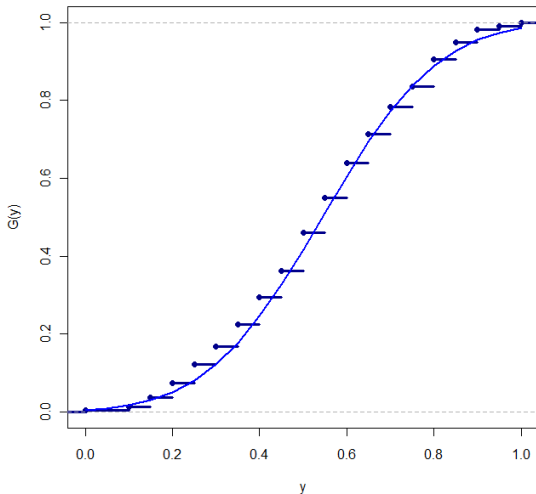
Introdução

Soluções

Frequências observadas

Aproximação Por Uma Distribuição Contínua

Polinômios de Bernstein





Exemplo: Aproximação Pela Normal - Caso Univariado

Estimação de Distribuições Bivariadas Discretas

Victor Fossaluzza

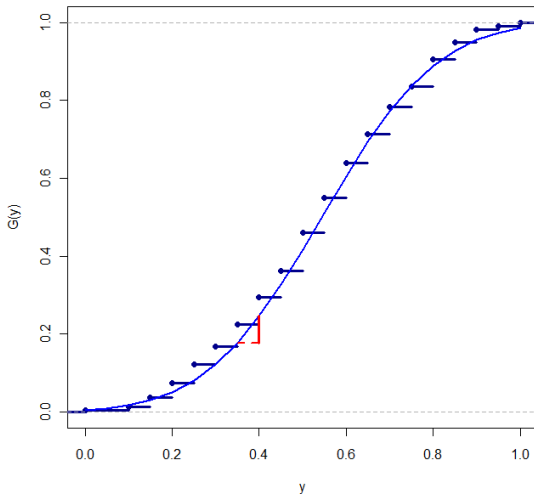
Introdução

Soluções

Frequências observadas

Aproximação Por Uma Distribuição Contínua

Polinômios de Bernstein



Exemplo: Aproximação Pela Normal

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

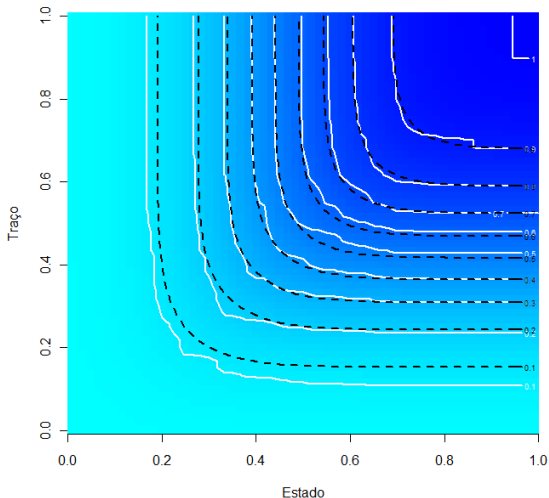
Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein





Exemplo: Aproximação Pela Normal

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

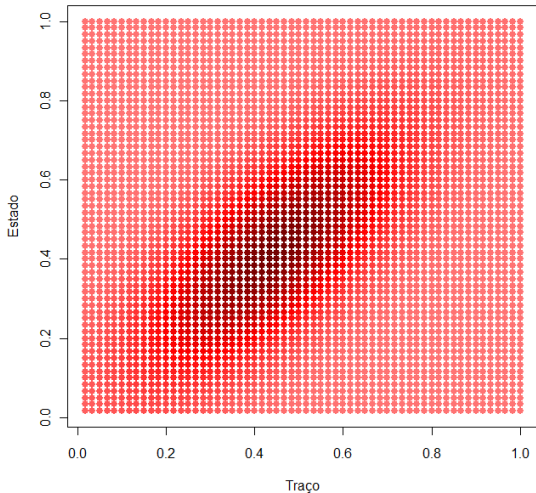
Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein





Exemplo: Aproximação Pela Normal

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

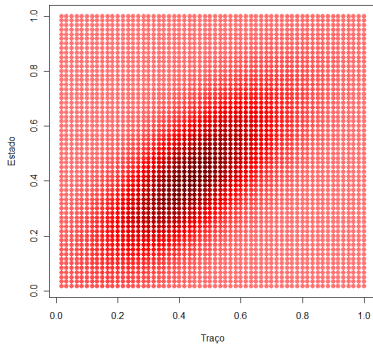
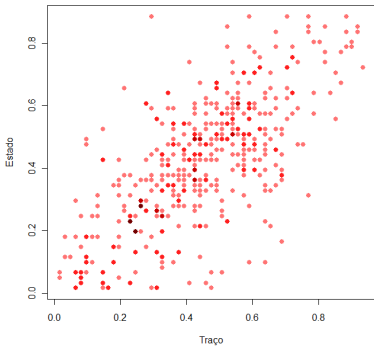
Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein





Tópicos

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

1 Introdução

2 Soluções

- Frequências observadas
- Aproximação Por Uma Distribuição Contínua
- Polinômios de Bernstein



Polinômios de Bernstein

Polinômio de Bernstein

Considere $F : [0, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in [0, 1]^k$.
 O *polinômio de Bernstein* de ordem m para F é definido por:

$$\mathcal{B}_F^m(\mathbf{x}) = \sum_{v_1=0}^m \cdots \sum_{v_k=0}^m F\left(\frac{v_1}{m}, \dots, \frac{v_k}{m}\right) \prod_{i=1}^k \binom{m}{v_i} x_i^{v_i} (1 - x_i)^{m-v_i} \quad (1)$$

- Os polinômios de Bernstein tem boas propriedades matemáticas, dentre elas: é absolutamente contínuo e derivável em $[0, 1]^k$ (e sua derivada é fácil de ser obtida). Além disso:

$$\mathcal{B}_F^m(\mathbf{x}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} F(\mathbf{x})$$



Polinômio de Bernstein

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

- A aproximação via polinômios de Bernstein para funções de distribuição já foi utilizada na literatura.
- Normalmente, em situações práticas onde a F não é conhecida, utiliza-se a distribuição empírica \hat{F} .
- Seja Y_1, \dots, Y_n uma amostra do vetor aleatório Y . A função de distribuição empírica \hat{F} é definida por:

$$\hat{F}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^k \mathbb{1}(Y_{ij} \leq x_j)$$



Polinômio de Bernstein

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

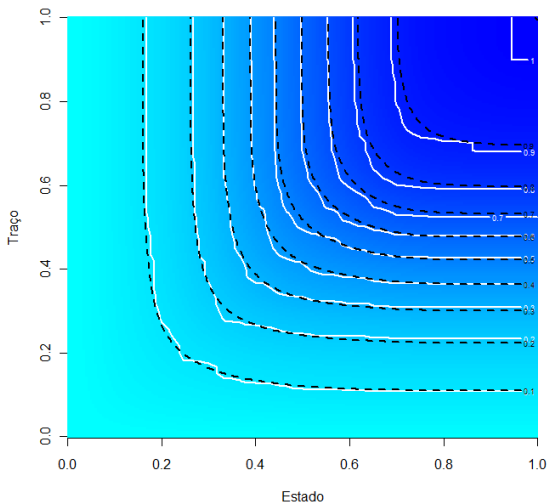
Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein





Polinômio de Bernstein

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

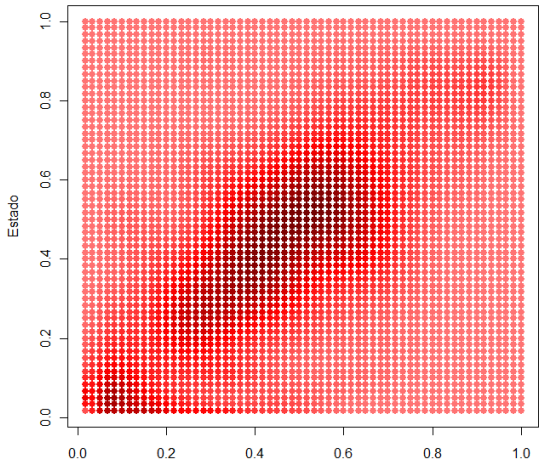
Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein



Traço





Polinômio de Bernstein

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

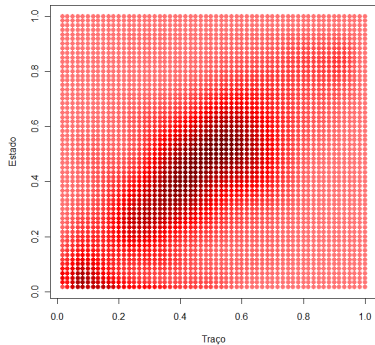
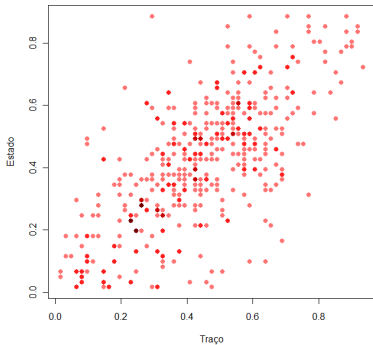
Introdução

Soluções

Frequências
observadas

Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein



Polinômio de Bernstein

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

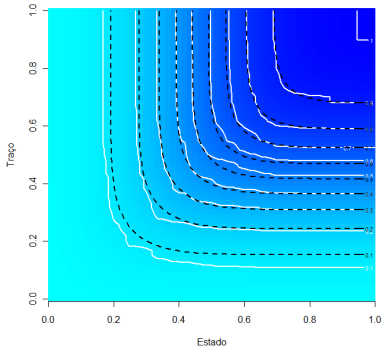
Soluções

Frequências
observadas

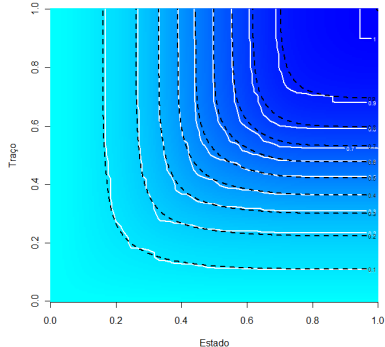
Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

Distribuição Normal



Polinômio de Bernstein





Polinômio de Bernstein

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Introdução

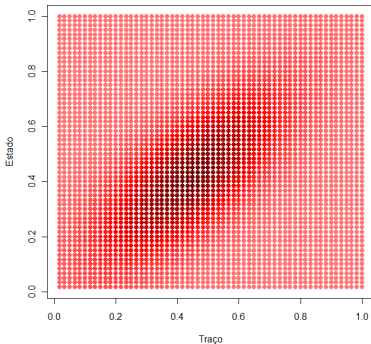
Soluções

Frequências
observadas

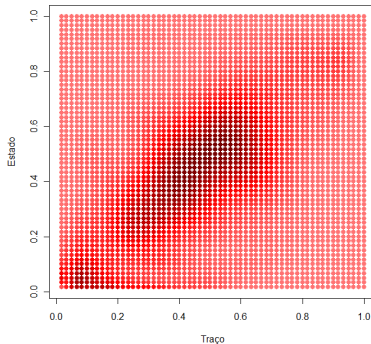
Aproximação Por
Uma Distribuição
Contínua

Polinômios de
Bernstein

Distribuição Normal



Polinômio de Bernstein





Bibliografia

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluza

Apêndice

Bibliografia

O Grande Hariolo:
Professor Carlinhos



W. Feller.

An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol. II
Wiley, New York, 1965.



G. J. Babu, A. J. Canty, Y. P. Chaubey.

Application of Bernstein Polynomials for smooth estimation of a distribution and density function.

Journal of Statistical Planning and Inference, 105:377-392, 2002.



S. Petrone.

Random Bernstein polynomials.

Scandinavian Journal of Statistics, 26(3):373-393, 1999a.



S. Petrone.

Bayesian density estimation using Bernstein polynomials.

The Canadian Journal of Statistics, 27(1):105-126. 1999b



S. Petrone e L. Wasserman.

Consistency of bernstein polynomial posteriors.

Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 64(1):79-100, 2002.



O Grande Haríolo: Professor Carlinhos

“The Statistician is the Wizard who makes ‘scientific’ statements about invisible states and quantities. However, contrary to the real wishes (or witches), he attaches uncertainties to his statements.”

Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Apêndice

Bibliografia

O Grande Haríolo:
Professor Carlinhos

O Grande Hariólo: Professor Carlinhos

“The Statistician is the Wizard who makes ‘scientific’ statements about invisible states and quantities. However, contrary to the real wishes (or witches), he attaches uncertainties to his statements.”



Estimação de
Distribuições
Bivariadas
Discretas

Victor
Fossaluzza

Apêndice

Bibliografia

O Grande Hariólo:
Professor Carlinhos